3. série — Vektorové prostory, lineární zobrazení

Označme $M(n\times m)$ množinu všech reálných matic $n\times m$, P množinu všech polynomů, P_n množinu všech polynomů stupně nejvýše n, $C(I)$ množinu všech spojitých funkcí na I, $C^n(I)$ množinu všech funkcí, které mají spojitou n-tou derivaci na I.

1. Ověřte, že následující množiny tvoří vektorové prostory:

1.1. R^2, **1.2.** $C([0,1])$, **1.3.** $M(3\times 2)$, **1.4.** P_4.

2. Které z následujících podmnožin tvoří vektorové podprostory?

2.1. $\{(r,2r,-r); r\in\mathrm{R}\}\subset\mathrm{R}^3$, **2.2.** $\{(s+r,2s-r,r+2s); r,s\in\mathrm{R}\}\subset\mathrm{R}^3$,

2.3. $\{(s+t,2s-t+2,t+s); s,t\in\mathrm{R}\}\subset\mathrm{R}^3$, **2.4.** $\{(rs+s,2s,r,s); r,s\in\mathrm{R}\}\subset\mathrm{R}^4$,

2.5. $P_2(\mathrm{R})\subset P(\mathrm{R})$, **2.6.** $\{ax^3+x+b; a,b\in\mathrm{R}\}\subset P_3$, **2.7.** $\{p\in P:\ p'(0)=0\}\subset P$,

2.8. $\{p\in P:\ p(1)-3p(2)=1\}\subset P$, **2.9.** $\{f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}: f'(0)+3f''(1)=0\}\subset C(\mathrm{R})$,

2.10. $\{A\in M(n\times n): A \text{ regulární}\}\subset M(n\times n)$, **2.11.** $\{A\in M(n\times n): \det A=0\}\subset M(n\times n)$.

3. Zjistěte, zda jsou následující množiny vektorů lineárně nezávislé:

3.1. $(1,1,0),(2,1,1),(3,1,2)\in\mathrm{R}^3$, **3.2.** $(1,0,-1,1),(2,1,0,1),(1,0,0,-1),(2,1,1,1)\in\mathrm{R}^4$,

3.3. $\sin x,\cos x,\sin 2x\in C(\mathrm{R})$, **3.4.** $\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x\in C(\mathrm{R})$,

3.5. $x^2+x+1, x+1, x-3\in P_3$, **3.6.** $x^3+x+1, x^3+2x, x^3+x+2\in P_3$.

4. Určete dimenzi a najděte nějakou bázi následujících vektorových prostorů:

4.1. $\mathrm{lin}\{(1,1,1,2,2),(-1,-2,-2,-2,2),(19,1,1,1,1),(-1,-3,-3,-2,6)\}$,

4.2. $\mathrm{lin}\{x+7,x^2-x-1,x^2+3,x-5\}$, **4.3.** $\{A\in M(3\times 3):\ A^T=A\}$,

4.4. $\{[x,y,z]\in\mathrm{R}^3:\ x+y-2z=0\}$, **4.5.** $\{f\in C^3(\mathrm{R}):\ f'''=0 \text{ na } \mathrm{R}\}$.

5. Je L lineární zobrazení? Pokud ano, jak vypadá $\mathrm{Ker}(L)$ a $\mathrm{Im}(L)$?

5.1. $L:\mathrm{R}^3\to R^4,\ L(u,v,w)=[u,u-w,u+v,v]$, **5.2.** $L:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3,\ L(u,v,w)=[u^2,u+v,0]$,

5.3. $L:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3,\ L(u,v,w)=[0,0,0]$, **5.4.** $L:\mathrm{R}^4\to\mathrm{R}^2,\ L(u,v,w,z)=[u,u]$,

5.5. $L:C(\mathrm{R})\to C(\mathrm{R}),\ L(f)(x)=f(x+1)-f(x)$, **5.6.** $L:C(\mathrm{R})\to C(\mathrm{R}),\ L(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

5.7. $L:C^1(\mathrm{R})\to C(\mathrm{R}),\ L(f)(x)=f'(x)$, **5.8.** $L:C^1(\mathrm{R})\to\mathrm{R}^2,\ L(f)=[f(0),f'(1)]$,

5.9. $L:P_2\to P_3,\ L(p)(x)=p(x)+x^2$, **5.10.** $L:P_2\to P_3,\ L(p)(x)=(x+1)p(x)$.

Výsledky a návody

2.1. ano, **2.2.** ano, **2.3.** ne, **2.4.** ne, **2.5.** ano, **2.6.** ne, **2.7.** ano, **2.8.** ne, **2.9.** ano, **2.10.** ne, **2.11.** ne.

3.1. ne, **3.2.** ano, **3.3.** ano, **3.4.** ano. **3.5.** ano, **3.6.** ano.

4.1. 3, $\{(1,1,1,2,2),(-1,-2,-2,-2,2),(19,1,1,1,1)\}$, **4.2.** 3, $\{1,x,x^2\}$, **4.3.** 6,

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\},$$

4.4. 2, $\{(1,-1,0),(1,1,1)\}$, **4.5.** 3, $\{1,x,x^2\}$.

5.1. ano, $\{[0,0,0]\}$, $\{[a,c,a+b,b]:\ a,b,c\in\mathrm{R}\}$, **5.2.** ne, **5.3.** ano, R^3, $\{[0,0,0]\}$, **5.4.** ano, $\{[0,v,w,z]:\ v,w,z\in\mathrm{R}\}$, $\{[a,a]:\ a\in\mathrm{R}\}$, **5.5.** ano, $\{f\in C(\mathrm{R}): f \text{ 1-periodická}\}$, $C(\mathrm{R})$, **5.6.** ano, $\{f\equiv 0\}$, $C^1(\mathrm{R})$, **5.7.** ano, $\{f\in C^1(\mathrm{R}): f \text{ konstantní}\}$, $C(\mathrm{R})$, **5.8.** ano, $\{f\in C^1(\mathrm{R}): f(0)=f'(1)=0\}$, R^2, **5.9.** ne, **5.10.** ano, $\{0\}$, $\{p\in P_3: p(-1)=0\}$,