

2. série — Určitý integrál, Vícerozměrný integrál

1. Spočtěte následující integrály:

$$1.1. \int_0^1 (x+2)^5 dx, \quad 1.2. \int_0^\pi \sin(x+2) \cos x dx, \quad 1.3. \int_1^2 \frac{x}{x+a}, a \geq 0, \quad 1.4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx,$$

$$1.5. \int_0^1 \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx, \quad 1.6. \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1} dx, \quad 1.7. \int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx, \quad 1.8. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx,$$

$$1.9. \int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx, \quad 1.10. \int_{-1}^1 \frac{x\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}} dx, \quad 1.11. \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}} dx.$$

2. Spočtěte následující vícerozměrné integrály: (ověřte předpoklady Fubiniovy věty)

$$2.1. \int_M x^2 + y^2 dx dy, \quad M \text{ je trojúhelník s vrcholy } [0, 0], [1, 0], [0, 2],$$

$$2.2. \int_M e^{-x-y} dx dy, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\},$$

$$2.3. \int_M x(y+1) dx dy, \quad M \text{ je jednotkový kruh},$$

$$2.4. \int_M \sin(x+2y) dx dy, \quad M = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$2.5. \int_M xy dx dy, \quad M \text{ je čtvrtina jednotkového kruhu ležící v prvním kvadrantu},$$

$$2.6. \int_M xyz^2 dx dy dz, \quad M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle,$$

$$2.7. \int_M 2x^2y dx dy, \quad M \text{ je čtyřúhelník s vrcholy } [0, 0], [0, 2], [1, 1], [1, 3],$$

$$2.8. \int_M ye^{-x} dx dy, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |x-y| \leq 1\},$$

$$2.9. \int_M (x^2y + xy^2) dx dy, \quad M \text{ je trojúhelník s vrcholy } [0, 0], [2, 1], [1, 2],$$

$$2.10. \int_M \frac{y^2\sqrt{x}}{1+x^4} dx dy, \quad M \text{ je plocha ohraničená parabolou } y^2 = x,$$

3. Spočtěte pomocí věty o substituci:

$$3.1. \int_M x^2 + y^2 dx dy, \quad M := \{x^2 + (y+2)^2 \leq 4\},$$

$$3.2. \int_M h - 2x - 3y dx dy, \quad M := \{x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$3.3. \int_M (x+y) \cos(\pi(x-y)) dx dy, \quad M := \{x+y \geq 0, x \leq 1, 1+y \leq x \leq 2+y\},$$

3.4. $\int_M x + y \, dx \, dy$, M je omezená křivkami $x + y = 4$, $x + y = 12$, $y^2 = 2x$,

3.5. $\int_M \frac{y}{x} e^{xy} \, dx \, dy$, M je omezená křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$, $y = x/2$,

3.6. $\int_M x^2 + y^2 \, dx \, dy$, M je omezená křivkami $x^2 + y^2 + 2x = 1$, $x^2 + y^2 = -2x$, $y^2 = 2x$,

Výsledky a návody

- 1.1.** $\frac{665}{6}$, **1.2.** $\frac{\pi}{2} \sin 2$, **1.3.** $1 + a(\ln(1 + a) - \ln(2 + a))$, **1.4.** 0 , **1.5.** $\frac{11}{30} + 2 \ln(5/6)$, **1.6.** $\ln 2$, **1.7.** 4 , **1.8.** $\frac{1}{2} \ln 3$, **1.9.** $\frac{4}{3} \pi \sqrt{3}$, **1.10.** $\frac{4}{3} \sqrt{2} - 2$, **1.11.** $-\frac{3}{4} \pi + \frac{9}{2} \ln 2$.
2.1. $\frac{5}{6}$, **2.2.** $\frac{1}{2}$, **2.3.** 0 , **2.4.** 2 , **2.5.** $\frac{1}{8}$, **2.6.** $\frac{8}{3}$, **2.7.** $\frac{7}{3}$, **2.8.** 2 , **2.9.** $\frac{39}{10}$, **2.10.** $\frac{1}{6} \pi \sqrt{2}$.
3.1. 24π , **3.2.** $\pi h R^2$, **3.3.** $-1/\pi^2$, **3.4.** $\frac{1}{5}(5^5 - 3^5) - \frac{1}{3}(5^3 - 3^3)$, **3.5.** $\frac{3}{4} e^2 (e^2 - 1)$, **3.6.** $5\pi/2$.