Taylorův polynom a aritmetika malého o

Počítání s malým o

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.
2. Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.
3. Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.
4. Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.
5. Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.
6. Jestliže $m, n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.
7. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathrm{R}$, $\delta > 0$, takové, že
$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \varphi(x) \neq b.$$
Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Taylorovy polynomy některých funkcí

Pro každé $k \in \mathrm{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0} = T_{2k}^{\sin,0} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0} = T_{2k+1}^{\cos,0} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+x),0} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+x)^\alpha,0} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k$, kde $\alpha \in \mathrm{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.