

Cvičení na doma – řešení

Cvičení 1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Řešení. Postupujme matematickou indukcí. Tvzení zřejmě platí pro $n = 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme, že platí i pro $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = \sum_{k=1}^n k2^k + (n+1)2^{n+1} \stackrel{\text{ind. předp.}}{=} (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = n2^{n+2} + 2.$$

Cvičení 2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^n k^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.

Řešení. Na semináři jsme si ukázali, že $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ a stačí nám tedy dokázat, že $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Použijme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme nyní platnost pro n a ukažme, že platí i pro $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\text{ind. předp.}}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

Cvičení 3. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ sečtěte $a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$.

Řešení. V případech, kdy $a = 0$ nebo $a = 1$ již řešení známe. Buď nyní $a \notin \{0, 1\}$. Označme si $s_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$ a spočtěme $s_n - as_n$.

$$\begin{aligned} as_n &= a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \dots + na^{n+1} \\ s_n - as_n &= a + a^2 + a^3 + \dots + a^n - na^{n+1} \\ s_n(1-a) &= a \frac{a^n - 1}{a - 1} - na^{n+1} \\ s_n &= a \frac{1 - a^n}{(1-a)^2} - n \frac{a^{n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

Cvičení 4. Pro $n \in \mathbb{N}$ sečtěte $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$.

Řešení. Výraz budeme postupně upravovat.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \\ s_n &= 1(3-1) + 2(4-1) + \dots + n((n+2)-1) \\ s_n &= 1 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 4 - 2 + \dots + n(n+2) - n \\ s_n &= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 + \dots + (n+1)^2 - 1 - (1 + 2 + \dots + n) \\ s_n &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - (n+1) - (1 + 2 + \dots + n) \\ s_n &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - (n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ s_n &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

kde na předposledním řádku jsme využili znalost o součtech $\sum_{k=1}^n k$ a $\sum_{k=1}^n k^2$.

Cvičení 5. Sečtěte $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ v závislosti na $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Dvojným použitím binomické věty pro dvojice 1, 1 a 1, -1 dostáváme

$$\begin{aligned} \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{4} + \dots + \binom{2n}{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}, \\ \binom{2n}{1} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} - \binom{2n}{4} + \dots + \binom{2n}{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} = (1-1)^{2n} = 0. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovností dostáváme

$$2 \left(\binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} + \cdots + \binom{2n}{2n} \right) 2^{2n},$$

odkud dělením dvěma získáváme výsledek 2^{2n-1} .

Cvičení 6. Nechť M značí množinu všech mužů a $\check{Z}$ množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy:

- $S(m, \check{z})$: „Muž m je manželem ženy $\check{z}$.“
- $L^{\rightarrow}(m, \check{z})$: „Muž m miluje ženu $\check{z}$.“
- $L^{\leftarrow}(m, \check{z})$: „Žena $\check{z}$ miluje muže m .“

Preložte následující výroky do češtiny.

- (a) $(\exists m \in M)(\forall \check{z} \in \check{Z}) : \neg S(m, \check{z})$
- (b) $(\exists \check{z} \in \check{Z})(\forall m \in M) L^{\rightarrow}(m, \check{z}) \Rightarrow \neg L^{\leftarrow}(m, \check{z})$
- (c) $(\exists \check{z} \in \check{Z})(\forall m \in M) L^{\leftarrow}(m, \check{z}) \Rightarrow \neg L^{\rightarrow}(m, \check{z})$
- (d) $(\forall \check{z} \in \check{Z}) [(\exists m \in M) : L^{\leftarrow}(m, \check{z}) \Rightarrow ((\exists m \in M) : L^{\rightarrow}(m, \check{z}) \wedge \neg L^{\leftarrow}(m, \check{z}))]$

Řešení.

- (a) Existuje svobodný muž.
- (b) Existuje žena, která žádnému muži neopětuje lásku.
- (c) Existuje žena, jíž žádný muž neopětuje lásku.
- (d) Každá žena, která někoho miluje, nemiluje některého muže, který miluje ji.