1. písemka – řešení

Úloha 1. Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$5^{x+1} + 5^{-x} = 6.$$

Řešení. Upravujme ekvivaletními úpravami:

$$\begin{aligned} 5^{x+1} + 5^{-x} &= 6 \quad / \cdot 5^x \ (\neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}) \\ 5 \cdot 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 1 &= 0 \\ (5^{x+1} - 1)(5^x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Odtud musí být buďto $5^{x+1} = 1$ nebo $5^x = 1$, čili $x + 1 = 0$ nebo $x = 0$. Množina reálných řešení je tedy dvouprvkouvá, a to $\{-1, 0\}$.

Úloha 2. Najděte všechna reálná řešení nerovnice

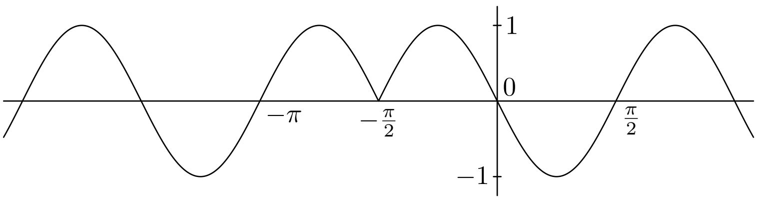
$$\frac{x+1}{x-2} < \frac{x+3}{x}.$$

Řešení. Předpokládejme, že $x \notin \{0, 2\}$. Upravme nerovnost na nerovnost ekvivalentní:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} &< \frac{x+3}{x} \\ \frac{x+1}{x-2} - \frac{x+3}{x} &< 0 \\ \frac{x^2 + x - (x^2 + x - 6)}{x(x-2)} &< 0 \\ \frac{6}{x(x-2)} &< 0 \end{aligned}$$

Levá strana je záporná právě když $x(x-2) < 0$, což nastává tehdy a jen tehdy, když $x \in (0, 2)$.

Úloha 3. Načrtněte graf funkce

$$\sin |2x + \pi|.$$

Řešení.