Toky v sítích, Hallova věta

Vít „Vejtek“ Musil

Abstrakt. Cílem přednášky je seznámit se základními definicemi a poznatky týkajících se toků v sítích a problému hledání maximálního toku. Další část přednášky se zabývá párováním a důkazem Hallovy věty pomocí aplikace poznatků o tocích.

Představte si čajovnu, kde u každého stolečku je kohoutek na čaj. K němu se čaj distribuuje systémem čajovodů od jednoho centrálního čajovaru. Jako každého zvídavého milovníka čaje vás zajímá, kolik maximálně čaje k vám může daným čajovodem téci.

Ukázka s čajovnou je zřejmě analogií k mnoha v praxi fungujícím systémům jako jsou například rozvody elektrické energie, vodovodu, telefonních linek, dopravní sítě a mnoho dalších, které mají společné atributy a stojí zato se jimi zabývat. Pro tyto účely si vybudujeme patřičnou abstraktní teorii a ukážeme si několik zajímavých poznatků.

Nejprve si zavedeme pro nás klíčové pojmy, bez kterých se neobejdeme.

Orientovaným grafem nazveme uspořádanou dvojici (V, E), kde V je neprázdná množina a $E \subseteq V \times V$, neboli množina nějakých uspořádaných dvojic z V. Hovoříme-li o konkrétním grafu G, píšeme $G = (V, E)$. Prvkům z V říkáme vrcholy, prvkům z E hrany.

Sítí nazveme čtveřici (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*), a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany nezápornými čísly.

A jak si takový graf a síť představovat? Stačí si nakreslit množinu puntíků a mezi nimi nějaké šipky a máme orientovaný graf. Když navíc vyznačíme dva vrcholy jako zdroj a stok a ke každé hraně napíšeme kladné reálné číslo, máme síť.

Tok v síti je každá funkce $f\colon E \to {\mathbb{R}^+}_0$, která splňuje

(1) pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \le f(e) \le c(e)$,
(2) pro každý vrchol $u \in V$ mimo zdroj a stok platí

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x, u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u, y).$$

Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z, x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x, z).$$

Klíčová slova. Orientovaný graf, síť, tok, řez, toky v sítích, maximální tok, množinový systém, systém různých reprezentantů, párovnínı́, Hallova podmínka, Hallova věta

A co nám definice vlastně říká? Pokud použijeme náš příměr s čajovodem, pak první podmínka říká, že v žádné části čajovodu nesmí téci více čaje, než na kolik je čajovod dimensován. Druhá podmínka odpovídá přirozené představě, že co do spoje trubek vteče, to také vyteče. Fysikové tento fakt nazvou *Kirchhoffovým zákonem*. Velikost toku potom bude množství čaje posílaného do čajovodu.

Protože nás zajímá maximální tok pro danou síť, uveďme si pro klid v duši následující tvrzení.

Tvrzení. *Pro každou síť existuje maximální tok.*

Jakkoliv se to může zdát, toto tvrzení není vůbec samozřejmé. Toků je nekonečně mnoho a jejich velikosti jsou obecně reálná čísla (například interval $(0,1)$ v reálných číslech nemá maximum). Pro nás toto tvrzení není až tak zajímavé a proto si jej nebudeme dokazovat. Naším cílem bude dokázat takzvanou hlavní větu o tocích. Nejprve však definujeme nové pojmy, aby se nám lépe pracovalo.

Řezem v síti (G,z,s,c), kde $G=(V,E)$, nazveme množinu hran $R \subseteq E$ takovou, že v grafu $(V, E \setminus R)$ neexistuje žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* je $c(R)=\sum_{e\in R} c(e)$.

Orientovaná cesta z bodu a do b není nic jiného než „jdi z a do b po šipkách a nikde se nezdržuj“. Jak vypadá neorientovaná cesta už každého jistě napadne. Na rozdíl od toků je řezů jen konečně mnoho, proto určitě existuje řez minimální kapacity.

Věta. *Pro každou síť platí*

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Neboli „maximální tok je roven minimálnímu řezu“

Abychom poodkryli pravdu kolem tohoto tvrzení, povíme si na přednášce ještě něco o řezech a cestách. K tomu se nám bude hodit následující definice.

Nasycená cesta vzhledem k toku f je neorientovaná cesta taková, že pro nějakou hranu ve směru od zdroje do stoku tok dosáhl své kapacity (neboli $f(e_i)=c(e_i)$ pro nějaké i) nebo je nulový pro nějakou hranu v opačném směru. Přirozeně, pokud cesta není nasycená, říkáme, že je to *nenasycená cesta*, nebo někdy také zlepšující cesta.

Už slovo „zlepšující“ nám říká, že by mohlo jít tok podle této cesty vylepšit. A skutečně je pravda, že

Tvrzení. *Tok je maximální, právě když je každá cesta nasycená.*

A k velkému překvapení nám samotný důkaz ukáže, jak maximální tok najdeme. Co více si jen přát?

Algoritmus. (Ford, Fulkerson)

(1) Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e.
(2) Pokud existuje vylepšující cesta, vylepši tok podle této cesty a opakuj, dokud existuje nějaká nenasycená cesta.
(3) Nyní je f maximální tok.

Ovšem úplně zadarmo to nebude. Z algoritmu není vidět, jak takové cesty hledat. Dokonce existují i takové sítě, kde nevhodným výběrem vylepšujících cest nedosáhneme maximálního toku ani po nekonečně mnoha krocích. Jistě se vám podaří takovou síť vymyslet.

Nyní začneme trochu z jiného soudku a ukážeme si poněkud nečekané souvislosti.

Úloha. Na rytířském plese se sešlo několik rytířů a několik urozených dam. Každý z rytířů má na první tanec několik adeptek, se kterými si chce zatančit (když si s dovolením očíslujeme dámy od 1 do n, každý z rytířů 1 až k má svoji volbu M_i, což je množina čísel těch dam, se kterými chce tančit). A nás zajímá, za jakých podmínek (volby oněch M_i) bude uspokojeno všech k rytířů?

Na tuto otázku nám dá spolehlivou odpověď následující definice a věta.

Definice. Buďte X a I konečné množiny. *Množinovým systémem* nazveme I-tici $\mathcal{M} = \{M_i;\, i \in I,\, M_i \subseteq X\}$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je potom funkce $f\colon I \to X$ taková, že

(1) pro všechna $i \in I$ je $f(i) \in M_i$,
(2) f je prostá.

Takto jsme vlastně pouze přepsali zadání, neboť X je množina dam, I množina rytířů, množinový systém jsou volby jednotlivých rytířů a zajímá nás, zda systém různých reprezentantů existuje, neboli zda můžeme každému rytíři přiřadit různou urozenou dámu, se kterou je ochoten tančit.

Věta. (Hallova) *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje tehdy a jen tehdy když pro každou $J \subseteq I$ je pravda, že $|\bigcup_{j\in J} M_j| \geq |J|$. Této podmínce se říká Hallova.*

Přirozeně se nabízí otázka, jak toto „párování“ souvisí s toky v sítích. Inu matematika často spojuje zdánlivě odlišná témata, a tak si na přednášce ukážeme, kterak čajovod dopomohl rytířům najít tu pravou dámu.

Literatura a zdroje

[1] Tomáš Valla, Jiří Matoušek: *Kombinatorika a grafy I*, KAM MFF UK, 2008.