Obarvení a dláždění

Vít „Vejtek" Musil

Abstrakt. Využití obarvení a dláždění v důkazech, vysvětlení na příkladu a sada úloh na procvičení.

Velice užitečnou důkazovou metodou je rozklad množiny do několika podmnožin. Aby se nám lépe pracovalo používáme pro každou takovou podmnožinku jinou barvu. Nejlépe je to opět vidět na příkladu.

Úloha. Šachovnici 8×8 lze pokrýt dominovými kostkami 2×1 právě $2^4 \cdot 901^2 = 12{,}988{,}816$ způsoby. Kolika způsoby lze týmiž kostkami pokrýt šachovnici 8×8 bez dvou diagonálně protilehlých rohů?

Řešení. Na první pohled vypadá úloha obtížně, avšak stačí si uvědomit, že každá dominová kostka pokryje jedno bílé a jedno černé políčko. Každé pokrytí tedy bude obsahovat 31 černých a 31 bílých polí. Avšak naše šachovnice obsahuje 30 bílých a 32 černých nebo naopak, tedy hledané rozmístění kostek neexistuje.

V příkladu jsme použili pojem domino, pro snažší práci si zavedeme několik podobných pojmů.

Definice. Objekt, který vznikne postupným spojováním stejných polygonů tak, že přidaný polygon má s původním objektem společnou hranu, nazveme *polyformem*. Objektu, jehož základním polygonem je čtverec, říkáme *polyomino*, speciálně polyomino velikosti n, kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 2, 3, 4, 5, 6$ používáme pojmy *domino, trimino, tetramino, pentomino, hexomino*. Pro kostky tetramina používáme označení I, L, O, S, T,[4] což trochu vzdáleně připomíná všech 5 typů kostek.

Příklad 1. Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 2. Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Příklad 3. Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

Příklad 4. Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

Příklad 5. Jeden z rohů čtverce $(2n + 1) \times (2n + 1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

Klíčová slova. obarvení, dláždění, důkazové techniky.

[4] Česky „P, R, O, H, R, Á, L, J, S, E, M", pozn. red.

Příklad 6. Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1 na ostatních 24 políček 1. Jedním tahem můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$, pro $a > 1$. Chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla 1. Kde může být na začátku -1, aby to bylo možné?

Příklad 7. Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedících rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je nejmenší možný počet volných políček?

Příklad 8. Výstavní síň má půdorys tvaru (ne nutně konvexního) n-úhelníku. Najděte co nejmenší počet hlídačů, kteří (pro dané n) takovou síň ohlídají (hlídač je bod, který vidí všemi směry).

Příklad 9. Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 10. Lze do krychle $6 \times 6 \times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1 \times 1 \times 4$ (rovnoběžně se stěnami)?

Příklad 11. Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

Příklad 12. Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou. Dokažte.

Příklad 13. Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$, $(n \geq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou. (Celostátní kolo MO 2007)

Příklad 14. Čtverec 6×6 je vyplněn dominovými kostkami 1×2. Dokažte, že vždy existuje přímka, která dělí celý čtverec a nedělí žádnou z kostek.

Literatura a zdroje

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, UK, 1998.