

Diskrétní matematika - cvičení č. 9

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

3. decembra 2025

Relace

1. U následujících relací si můžeš vyzkoušet znázornění relace maticí, bipartitním grafem a orientovaným grafem.

a) $R_1 = \{(-2, 5), (5, 5), (5, -2), (0, 0)\}$ na množině $\{-2, 0, 5\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}; x \geq y\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \{1, \dots, 5\} \times \{4, \dots, 10\}; x \text{ a } y \text{ jsou nesoudělné}\}$

2. Určete, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, antisymetrické nebo tranzitivní:

a) $X = \{a, b, c\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$ a $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$

d) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ a $R = \{(x, y) \mid \text{nsd}(x, y) = 1\}$

Řešení:

a) reflexivní: ano, symetrická: ano, antisymetrická: ne, tranzitivní: ano

b) reflexivní: ne, symetrická: ano, antisymetrická: ano, tranzitivní: ne

c) reflexivní: ano, symetrická: ne, antisymetrická: ano, tranzitivní: ano

d) reflexivní: ne, symetrická: ano, antisymetrická: ne, tranzitivní: ne

3. Buďte R a S reflexivní/tranzitivní/symetrické relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní/tranzitivní/symetrické?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R - S$

d) $S \circ R$

e) R^{-1}

Řešení:

- a) reflexivní: ano, symetrická: ano, tranzitivní: ne
- b) reflexivní: ano, symetrická: ano, tranzitivní: ano
- c) reflexivní: ne, symetrická: ano, tranzitivní: ne
- d) reflexivní: ano, symetrická: ne, tranzitivní: ne
- e) reflexivní: ano, symetrická: ano, tranzitivní: ano

Pro víc detailů viz <http://matematika.reseneulohy.cz/3353/uzavrenost-reflexivity>,
<http://matematika.reseneulohy.cz/3354/uzavrenost-tranzitivity>,
<http://matematika.reseneulohy.cz/3355/uzavrenost-symetrie>

4. Ukažte, že pro zobrazení $f: X \rightarrow X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na.

Platí totéž i pro nekonečné množiny X ?

Řešení:

<http://matematika.reseneulohy.cz/3361/definice-bijekce>

5. Rozhodněte, zda jsou ekvivalence následující relace a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

- a) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow p|(x - y)$ (zbytkové třídy modulo $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)
- b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, xRy \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$
- c) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$. Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Řešení:

<http://matematika.reseneulohy.cz/3384/tri-konkretni-ekvivalence>

6. Uvažme neorientovaný graf G a relaci R na jeho vrcholech takovou, že uRv právě tehdy, když z u do v vede cesta.

- a) Ukažte, že R je ekvivalence.
- b) Určete třídy ekvivalence relace R
- c) Jak by se tato relace změnila, kdybychom místo existence cesty uvažovali existenci sledu?

Řešení:

<http://matematika.reseneulohy.cz/3386/dosazitelnost-v-neorientovanem-grafu>

7. Určete počet různých částečných uspořádání na čtyřech prvcích.

Řešení:

<http://matematika.reseneulohy.cz/3403/pocet-usporadani>

8. Rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

- a) Uspořádání bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.
- b) Uspořádání bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.
- c) Uspořádání bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.
- d) Uspořádání bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.
- e) Uspořádání bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.
- f) Uspořádání bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině.

Řešení:

<http://matematika.reseneulohy.cz/3406/nejvetsi-a-maximalni-prvky>

9*(Erdős, Szekeres). Jsou dána přirozená čísla a, b . Ukažte, že z každé posloupnosti, jejíž členy se neopakují a která má délku $ab + 1$, lze vybrat rostoucí posloupnost délky $a + 1$ nebo klesající posloupnost délky $b + 1$.

Řešení:

Každému členu x_i původní posloupnosti přiřadíme dvojici čísel (u_i, d_i) , kde u_i je délka nejdelší rostoucí podposloupnosti končící v x_i a d_i je délka nejdelší klesající podposloupnosti končící v x_i . Jelikož členy původní posloupnosti jsou různá čísla, platí, že pokud $i \neq j$, pak $(u_i, d_i) \neq (u_j, d_j)$. Pro spor předpokládejme, že $1 \leq u_i \leq a$ a $1 \leq d_i \leq b$ pro všechna i . Tedy existuje nejvýše ab různých dvojic (u_i, d_i) , což je spor s předpokladem, že původní posloupnost má délku $ab + 1$. Tedy alespoň jeden z parametrů u_i nebo d_i musí být větší než a nebo b , což znamená existenci požadované rostoucí nebo klesající podposloupnosti.

10*(AUO 1972). Mějme 50 ne nutně různých intervalů. Dokažte, že alespoň osm z nich má společný neprázdný průnik, nebo alespoň osm z nich je po dvou disjunktních.

Řešení:

Předpokládejme, že neexistuje osm po dvou disjunktních intervalů (pokud jo, máme hotovo). Nalezneme interval s nejmenším pravým koncem a všechny intervaly, které s ním mají neprázdný průnik, obarvíme stejnou barvičkou 1. Nyní pokračujeme obdobně s intervaly, které nejsou obarveny barvičkou 1, najdeme interval s nejmenším pravým koncem a všechny intervaly, které s ním mají neprázdný průnik obarvíme barvičkou 2. Pokračujeme tímto způsobem, dokud nejsou všechny intervaly obarveny. Jelikož neexistuje osm po dvou disjunktních intervalů, použili jsme nejvýše sedm barev. Podle Dirichletova principu tedy alespoň jedna barva byla použita na nejméně $\lceil 50/7 \rceil = 8$ intervalů. Tyto intervaly mají dle konstrukce společný neprázdný průnik.

11*(MEMO 2012). Buď n přirozené číslo. Množinu $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ nazveme trojatomou, pokud neobsahuje tři členy a, b, c takové, že $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$. Určete největší možný počet prvků trojatomé množiny S .

Řešení:

$\lceil \frac{3}{4}n \rceil$, detaily např. na <https://skmo.sk/dokument.php?id=993> (str. 2)