

Diskrétní matematika - cvičení č. 8

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

26. novembra 2025

Grafy

1. Ukažte, že když graf obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Řešení:

Nechť $v_1, v_2 \dots v_{2k+1}$ jsou vrcholy nejmenšího lichého cyklu v grafu G . Pak je indukovaný podgraf na těchto vrcholech také cyklem, protože kdyby tam byla nějaká další hrana, tak by vznikl menší lichý cyklus.

2. Existuje bipartitní graf s aspoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?

Řešení:

Ne, z principu holubníku alespoň jedna z partit obsahuje alespoň 3 vrcholy, tedy doplněk grafu obsahuje trojúhelník (trojcyklus), tedy nemůže být bipartitní.

3. Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

Řešení:

Zde: <http://matematika.reseneulohy.cz/3580/bipartitni-podgraf>

4*. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.

Řešení:

(Dle Aničky O.) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme graf G_n se $4n$ vrcholy, co je isomorfní svému doplňku $\overline{G_n}$. Vrcholy rozdělíme na 4 množiny po n vrcholech, budeme jim říkat A, B, C, D . Na vrcholech v A vezmeme úplný podgraf, stejně tak na vrcholech v C . Naopak mezi vrcholy ve skupině B nebudou žádné hrany, stejně tak pro D . Dále ze všech vrcholů v A povedeme hrany do všech vrcholů v B a do všech vrcholů v C a z vrcholů v C navíc do všech vrcholů v D .

Ukážeme, že zde existuje hledaný isomorfismus. Vezmeme bijektivní zobrazení f , které zobrazuje vrcholy v A libovolně na vrcholy v B v $\overline{G_n}$, vrcholy v B na vrcholy v C , vrcholy v C na vrcholy v D a vrcholy v D na vrcholy v A . Pak mezi každými dvěma vrcholy v A máme hranu a stejně tak mezi každými vrcholy v $f(A) = B$ máme hranu v $\overline{G_n}$.

Stejně tak pro vrcholy z C . Naopak mezi každými dvěma vrcholy v B nemáme hranu a stejně tak mezi každými vrcholy v $f(B) = C$ nemáme hranu v $\overline{G_n}$.

Obdobně pro D . Zbývají hrany mezi jednotlivými částmi A, B, C, D . Mezi každým vrcholem z A a vrcholem z B máme hranu a stejně tak mezi každým vrcholem z $f(A) = B$ a z $f(B) = C$ máme hranu v $\overline{G_n}$.

Stejně tak hrany mezi vrcholy v A a C a mezi vrcholy v C a D se zobrazí na hrany mezi vrcholy v B a D a mezi vrcholy v D a A v $\overline{G_n}$. Pak mezi každými dvěma vrcholy v A máme hranu a stejně tak mezi každými vrcholy v $f(A) = B$ máme hranu v $\overline{G_n}$.

Obdobně nemáme hrany mezi vrcholy v A a D , v B a C , v B a D a stejně tak nemáme hrany v $\overline{G_n}$ mezi vrcholy v B a A , v C a D a v C a A . Tím jsme ověřili, že jde o isomorfismus.

Stromy

5. Najděte všechny stromy jejichž doplňkem je také strom. Zdůvodněte, že jste na žádný nezapomněli.

Řešení:

Strom na n vrcholech má $n - 1$ hran. Strom spolu s jeho doplňkem má dohromady $\binom{n}{2}$ hran, tedy dostáváme rovnici $\binom{n}{2} = 2(n - 1)$. Řešením této rovnice je $n = 1$ (což je strom bez hran) a $n = 4$. Pro $n = 4$ existuje právě jeden strom, jehož doplněk je také strom (cesta na 4 vrcholech).

6. Kolik nejvíce a kolik nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?

Řešení:

Pro liché n takový strom neexistuje, protože součet stupňů všech vrcholů by byl lichý. Platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2(n - 1)$, tedy pokud má strom k listů (vrcholů stupně 1), tak má $n - k$ vrcholů stupně 3 a platí rovnice $k + 3(n - k) = 2(n - 1)$, odkud dostaneme $k = 2 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1$. Tedy strom má právě $\frac{n}{2} + 1$ listů.

7. Množině vrcholů grafu říkáme nezávislá, pokud žádné dva její vrcholy nejsou spojeny hranou. Dokažte, že každý strom na n vrcholech obsahuje nezávislou množinu velikosti aspoň $n/2$.

Řešení:

Zvolíme libovolný vrchol stromu jako kořen. Pak rozdělíme vrcholy na dvě množiny podle parity vzdálenosti od kořene. Obě tyto množiny jsou nezávislé, protože hrana může spojit pouze vrcholy, které se liší ve vzdálenosti od kořene o 1. Jedna z těchto množin má velikost alespoň $n/2$ (z Dirichletova principu).

Řešení:

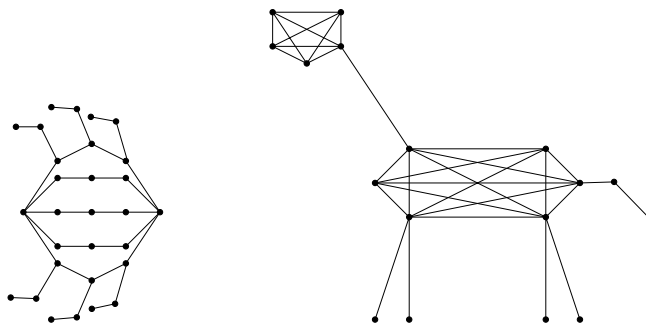
Cyklus má n koster.

9. Existuje graf, který má právě dvě kostry? Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?

Řešení:

Strom má 1 koster, každý graf obsahující cyklus má alespoň 3 kostry, tedy graf s právě 2 kostrami neexistuje. Pro všechna ostatní $n \geq 1$ existuje graf s právě n kostrami (strom pro $n = 1$ nebo cyklus na $n \geq 3$ vrcholech).

10. Kolik koster mají následující zvířátka?



Řešení: Beruška má 5×4^4 koster, žirafa má $5^3 \times 6^4$ koster.

11.

- a) Kolik je v grafu K_n koster, které obsahují právě dva vrcholy stupně většího než 1?
- b) Kolik je v grafu K_n koster, které obsahují právě tři vrcholy stupně 1?

Řešení:

a) $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$

b) $n! \frac{\binom{n-2}{2}}{6}$

12*. V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskóčit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat.¹ Vzdáleností dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. Osamělost enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.

Řešení:

Dokážeme, že pokud je n sudé, pak se osamělosti dvou entů liší o sudé číslo. Vytvoríme graf G , jehož vrcholy jsou entové a hrany spojují enty, kteří jsou si dost blízko na to, aby mezi nimi veverka přeskočila. Podle zadání je tento graf strom. Odobráním libovolné hrany $\{v_i, v_j\}$ se graf rozpadne na dvě komponenty A, B také, že $v_i \in A$ a $v_j \in B$. Označme o_i osamělost enta v_i v komponente A a o_j osamělost enta v_j v komponente B . Pak pro osamělosti entů v_i a v_j v původním grafu platí:

$$O_i = o_i + \sum_{v \in B} (d(v, v_j) + 1) = o_i + o_j + |B|$$

$$O_j = o_j + \sum_{v \in A} (d(v, v_i) + 1) = o_j + o_i + |A|$$

Odečtením těchto dvou rovnic od sebe dostaneme:

$$O_i - O_j = |B| - |A| = n - 2|A|,$$

což je sudé číslo, protože n je sudé číslo. Tedy osamělosti dvou sousedních entů se liší o sudý počet, z čehož plyne, že osamělosti libovolných dvou entů se liší o sudý počet.