

Diskrétní matematika - cvičení č. 7

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

19. novembra 2025

Grafy

1. Uvažte množinu vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ a určete, kolik je na této množině různých (ale vzájemně izomorfních):

- (a) úplných grafů K_n ,
- (b) cest P_n ,
- (c) úplných bipartitních grafů $K_{k,n-k}$ v závislosti na k ,
- (d) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů K_k a K_{n-k} v závislosti na k ,
- (e) grafů, v nichž má každý vrchol stupeň 1.

Řešení:

- (a) 1
- (b) $\frac{n!}{2}$
- (c) $\frac{\binom{n}{k}}{2}$ pokud je $n = 2k$, jinak $\binom{n}{k}$
- (d) stejně jako c)
- (e) pro n liché nelze, jinak $\frac{n!}{2^{n/2} \frac{n}{2}!}$

2. Jaký je maximální možný počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami?

Řešení:

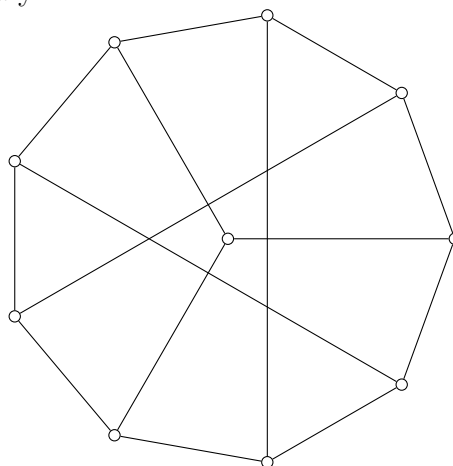
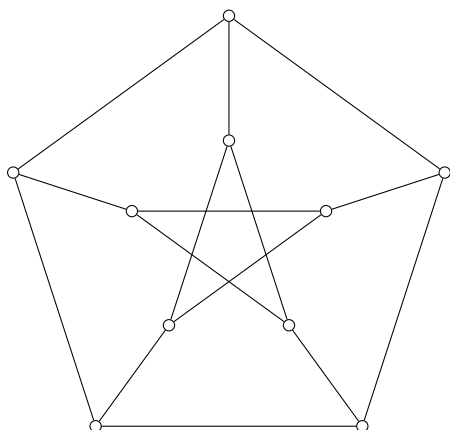
Protože existuje jenom konečně mnoho grafů na n vrcholech, některý z grafů nadobývá maximum hran, ať je to graf G . Všechny komponenty v G jsou izomorfní úplnému grafu (pokud ne, můžeme tam přidat hrany, což je spor s maximalitou G). Všechny komponenty až na jednu jsou tvořeny jenom vrcholama (bez hran). Pokud by komponenty C_1 a C_2 měli postupně c_1 a c_2 vrcholů, přičemž $c_1 \geq c_2 \geq 2$, můžeme vytvořit graf H tak, že odtrhneme libovolný vrchol z komponenty C_2 a připojíme jej ke komponentě C_1 tak, aby nám opět vznikla komponenta izomorfní úplnému grafu. Pak graf H má pořád c komponent, ale taky má o $c_1 - (c_2 - 1) \geq 1$ hran víc než graf G , což je spor s maximalitou G . Maximální počet hran je tedy $\binom{n-(c-1)}{2}$.

3. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet souvislých částí grafu.

Řešení:

Graf se všemi stupni sudými je eulerovský, tedy obsahuje eulerovskou kružnici. Z toho vidno, že odebráním libovolné hrany se souvislost grafu zachová.

4. Najděte izomorfismus mezi následujícími dvěma grafy:

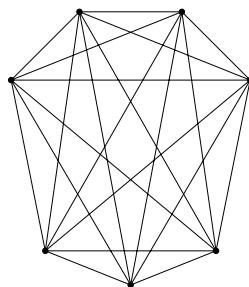
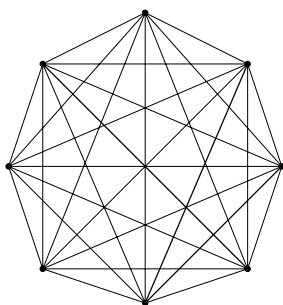


Dále rozhodněte, zda-li jsou izomorfní třetímu grafu F , danému vzorcem: $V_F = \binom{\{1, \dots, 5\}}{2}$, $E_F = \{(A, B) : A \cap B = \emptyset\}$.

Řešení:

zde: <http://matematika.reseneulohy.cz/3568/izomorfismus-tri-grafu>

5. Jdou následující grafy nakreslit jedním tahem?



Řešení:

První graf ne, druhý ano. V prvním grafu mají všechny vrcholy lichý stupeň (a má víc než jen dva vrcholy), tedy v něm neexistuje ani otevřený eulerovský tah. V druhém grafu mají všechny vrcholy sudý stupeň, tedy tento graf je eulerovský.

6. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na hranově disjunktní sjednocení kružnic. Je rozklad jednoznačný? Pokud ne, je počet kružnic v rozkladu dán jednoznačně?

Řešení:

zde: <http://matematika.reseneulohy.cz/3626/eulerovsky-graf-a-sjednoceni-kruznic>

7*. Dokážeme do roviny nakreslit devět úseček tak, aby každá protínala právě tři jiné úsečky?

Řešení:

Ne, ať vrcholy grafu představují úsečky a hrany jejich průsečíky (mezi dvěma vrcholy vede hrana právě tehdy, když se dané dvě úsečky protínají). Pokud každá úsečka protíná právě tři jiné úsečky, pak má každý vrchol grafu stupeň 3. Součet stupňů všech vrcholů je 9×3 , což je liché číslo, což je spor s principem sudosti.