

Diskrétní matematika - cvičení č. 6

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

5. novembra 2025

PIE

1. Kolik je permutací na množině $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním pevným bodem? Můžete použít, že permutací bez pevného bodu je $\check{s}(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$.

Řešení:

$$\sum_{i=1}^n \check{s}(n-1) = n \cdot \check{s}(n-1) = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} = \check{s}(n) - (-1)^n$$

2. Označme $\varphi(n)$ počet čísel z $\{1, \dots, n-1\}$, která jsou nesoudělná s n . Dokažte, že je-li $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ prvočíselný rozklad čísla n , platí:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Řešení:

Označme $A_{p_i} = \{kp_i | 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i}\}$. Potom počet všech soudělných čísel od 1 do n je $\bigcup_{i=1}^r A_{p_i}$. Pak tedy

$$\begin{aligned} |A_{p_i}| &= \frac{n}{p_i} \\ |\bigcap_{i \in I} A_{p_i}| &= |A_{\prod_{i \in I} p_i}| = \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \\ \varphi(n) &= n - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_{p_i}| = n - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \\ &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \end{aligned}$$

3. Petr Štědrý pořádá každý večer večeři pro své přátele. Na večeři jsou pozvaní vždy tři hosté. Kolika způsoby může Petr rozeslat pozvánky pro svých 7 přátel na celý týden tak, aby každý z těchto sedmi přátel byl alespoň jednou pozván?

Řešení: Ať A_i je množina všech pozvání takových, že přítel i nebyl pozván ani raz. Počet všech pozvání je $\binom{7}{3}^7$ a tedy počet pozvání, kdy je pozván každý přítel alespoň jednou je

$$\begin{aligned} \binom{7}{3}^7 - |\bigcup_{i=1}^7 A_i| &= \binom{7}{3}^7 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, 7\}} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| \\ &= \binom{7}{3}^7 - \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \binom{7}{i} \binom{7-i}{3}^7 \\ &= 35^7 - 7 \cdot 20^7 + 21 \cdot 10^7 - 35 \cdot 4^7 + 35 = 55588723470 \end{aligned}$$

4. V celočíselné mřížce určete počet nejkratších cest mezi vrcholy $(0, 0)$ a $(10, 10)$, které neprocházejí žádným z bodů $(3, 2)$, $(6, 7)$ a $(2, 6)$.

Řešení:

Odevšech nejkratších cest odečteme ty nejkratší vedoucí přes některý z daných vrcholů a použijeme PIE.

$$\frac{20!}{10!}10! - \left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{15!}{7!8!} + \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{12!}{8!4!} + \frac{13!}{6!7!} \cdot \frac{7!}{4!3!} \right) + \left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{7!}{4!3!} + 0 + \frac{8!}{2!6!} \frac{5!}{4!1!} \frac{7!}{4!3!} \right) - 0$$