

Diskrétní matematika - cvičení č. 5

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

29. oktobra 2025

1. Ve městě fungují 2 sportovní kluby. Fotbalový klub má 12 členů, tenisový klub 9. Přitom 3 fotbalisté hrají i tenis. Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?

Řešení:

Celkem je členem nějakého klubu $12 + 9 - 3 = 18$ osob.

2. Město z předchozího příkladu založilo ještě volejbalový klub. Přihlásilo se do něj 15 lidí, z toho 4 fotbalisté, 3 tenisté a jeden fotbalista-tenista. Kolik osob je teď členem nějakého klubu?

Řešení:

Členem nějakého klubu je nyní $12 + 9 + 15 - 3 - 4 - 3 + 1 = 27$ osob.

3. Z čísel 1, 2, ..., 1000 vyškrtáme všechny násobky 3, 5, 7, 42. Kolik jich zůstane?

Řešení:

Vyškrtním násobků 3 vyškrtáme i násobky 42, protože každý násobek 42 je i násobkem 3, proto stačí škrtnat násobky 3, 5, 7.

Počet násobků 3 je $\lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$, nás. 5 je $\lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ a násobků 7 je $\lfloor \frac{1000}{7} \rfloor = 142$.

Násobků 15 (společné nás. 3 a 5) je $\lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$, násobků 21 (společné nás. 3 a 7) je $\lfloor \frac{1000}{21} \rfloor = 47$ a násobků 35 (společné nás. 5 a 7) je $\lfloor \frac{1000}{35} \rfloor = 28$.

Násobků 105 (společné násobky 3, 5 a 7) je $\lfloor \frac{1000}{105} \rfloor = 9$.

Podle principu inkluze a exkluze je počet vyškrtaných čísel

$$333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543.$$

Zůstane tedy $1000 - 543 = 457$ čísel.

4. Určete počet způsobů, jak lze obarvit políčka tabulky 3×3 červeně, žlutě a modře tak, že každá barva byla použita právě třikrát a navíc žádný řádek ani sloupec nebyl jednobarevný. (Obarvení lišící se pouze otočením považujeme za různá.)

Řešení:

Ať C, Z, M jsou množiny obarvení, kde je 1 řádek nebo sloupec postupně červený, žlutý nebo modrý. Hledáme velikost množiny všech obarvení bez jednobarevných řádků a sloupců, tedy velikost množiny

$$\overline{C \cup Z \cup M}.$$

Platí $|C| = |Z| = |M| = 3 \cdot 2 \cdot 6! / (3!)^2 = 120$, protože máme $3 \cdot 2$ možností na výběr jednobarevného řádku nebo sloupce a zbylá políčka musíme obarvit tak, aby každá barva byla použita právě třikrát. Dále platí $|C \cap Z| = |C \cap M| = |Z \cap M| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, protože máme $3 \cdot 2 \cdot 2$ možností na výběr dvou jednobarevných řádků nebo sloupců a zbylá políčka musíme obarvit tak, aby každá barva byla použita právě jednou. Nakonec platí $|C \cap Z \cap M| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Podle principu inkluze a exkluze je tedy počet vyhovujících obarvení

$$\begin{aligned} & \frac{9!}{(3!)^3} - 3 \cdot 120 + 3 \cdot 12 - 12 \\ & = 1680 - 360 + 36 - 12 = 1344. \end{aligned}$$

Mohli jsme si také uvědomit, že když jsou 2 řádky/sloupce jednobarevné, musí být jednobarevný taky ten třetí a tedy každé takové obarvení je obsaženo v každé z množin C, Z, M právě jednou, takže když ho nejdřív 3-krát spočteme, tak ho pak stačí 2-krát odečíst a dostaneme (stejný) výsledek.

5. Kolika způsoby lze seřadit písmena $A, E, K, L, P, O, R, S, V$ tak, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov $PRASE, PES, LAK$?

Řešení:

Označme A, B, C množiny slov (uspořádání písmen), ve kterých se vyskytují postupně slova $PRASE, PES, LAK$. Hledáme velikost množiny

$$\overline{A \cup B \cup C}.$$

Platí

$$|A| = \binom{9}{5} \cdot (9-5)! = 3024, \text{ pro slovo } PRASE \text{ vybereme 5 pozic a zbylé písmena}$$

umístíme na zbylé pozice, uspořádat je můžeme $(9-5)!$ způsoby

$$|B| = \binom{9}{3} \cdot (9-3)! = 60480,$$

$$|C| = \binom{9}{3} \cdot (9-3)! = 60480,$$

$$|A \cap B| = 0, \text{ protože žádné slovo neobsahuje obě slova } PES \text{ i } PRASE$$

$$|A \cap C| = \binom{9}{7} \cdot (9-7)! \cdot 3 \cdot 3 = 648, \text{ pro slovo obsahující } PRASE \text{ a } LAK$$

vybereme 7 pozic, zbylé 2 pozice musí být pro V a O , které můžeme uspořádat $(9-7)!$ způsoby. Dále máme 3 možnosti, pro uspořádání trojice písmen L, P, R , pak musí následovat písmeno A a pak máme opět 3 možnosti pro uspořádání písmen E, S, K .

$$|B \cap C| = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot (9-6)! = 1080, \text{ vybereme 3 pozice pro } PES, \text{ ze zbylých}$$

vybereme 3 pozice pro LAK , zbylá písmena uspořádáme na zbylé pozice.

$$|A \cap B \cap C| = 0.$$

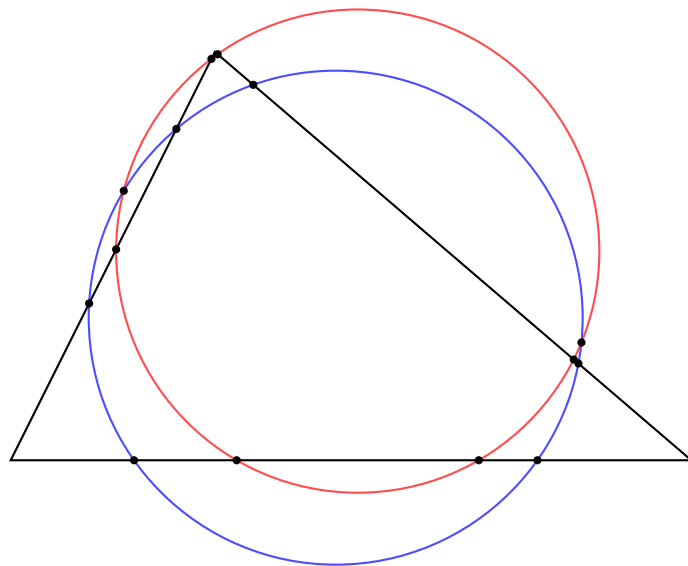
Z principu inkluze a exkluze dostaneme

$$\begin{aligned} |\overline{A \cup B \cup C}| &= 9! - (864 + 60480 + 60480) + (0 + 648 + 1080) - 0 \\ &= 362880 - 121824 + 1728 = 242784. \end{aligned}$$

6. V rovině je trojúhelník a dvě různé kružnice. Kolik maximálně bodů se může nacházet na průsečíku alespoň dvou útvarů?

Řešení:

Trojúhelník má 3 strany, každá kružnice může protínat stranu nejvýše ve 2 bodech, tedy celkem $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ průsečíků mezi kružnicemi a stranami trojúhelníku. Dále mohou kružnice protínat jedna druhou nejvýše ve 2 bodech. Celkem tedy může být na průsečíku alespoň dvou útvarů maximálně $12 + 2 = 14$ bodů.



7. Jaká je pravděpodobnost, že 4 náhodně vytažené hrací karty obsahují eso (karet je 52)?

Řešení:

Počet všech možných čtveřic karet je $\binom{52}{4}$. Počet čtveřic karet bez esa je $\binom{48}{4}$. Pravděpodobnost, že čtveřice neobsahuje eso, je tedy

$$\frac{\binom{48}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{194580}{270725} \approx 0.7187.$$

Pravděpodobnost, že čtveřice obsahuje alespoň jedno eso, je tedy přibližně $1 - 0.7187 = 0.2813$.

Dá se využít i přímý výpočet. Hledáme velikost zjednocení množin A, B, C, D , kde A je množina čtveřic obsahujících eso srdcové, B obsahujících eso pikové, C obsahujících eso křížové a D obsahujících eso kárové. Podle principu inkluze a exkluze je

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= 4 \cdot \binom{51}{3} - 6 \cdot \binom{50}{2} + 4 \cdot \binom{49}{1} - 1 \\ &= 4 \cdot 20825 - 6 \cdot 1225 + 4 \cdot 49 - 1 \\ &= 83300 - 7350 + 196 - 1 \\ &= 76145. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost je tedy $\frac{76145}{270725} \approx 0.2813$.

8. Najděte počet nezáporných celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ takových, že $x_1 \leq 4$ a $x_2 \leq 7$.

Řešení:

Označme A množinu řešení, kde $x_1 \geq 5$ a B množinu řešení, kde $x_2 \geq 8$. Pak

$$|A| = \binom{(18-5)+4-1}{4-1} = \binom{16}{3} = 560$$

(problémy tohoto typu sme již řešili, můžeme si představit, že rozdělujeme 18 nerozlišitelných kuliček do 4 rozlišitelných přihrádek, přičemž nejdřív vložíme do první přihrádky 5 kuliček a zbytek pak spočítáme počet způsobů, jak rozdělit zbytek). Podobně,

$$|B| = \binom{(18-8)+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 260.$$

Nakonec

$$|A \cap B| = \binom{(18 - 5 - 8) + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{8}{3} = 56.$$

Z principu inkluze a exkluze dostaneme, že počet vyhovujících řešení je

$$\begin{aligned} \# \text{ celočíselných nezáporných řešení} - |A \cup B| &= \binom{18 + 4 - 1}{4 - 1} - (|A| + |B| - |A \cap B|) \\ &= \binom{21}{3} - (560 + 260 - 56) = 1330 - 764 \\ &= 566. \end{aligned}$$

9. Chceme postavit n manželských párů do řady tak, aby nikdo nestál vedle svého partnera. Kolik máme možností?

Řešení:

Opět od všech možností odečteme ty nevyhovující. Očíslujme páry $1, 2, \dots, n$ a označme A_i množinu těch uspořádání, že i -ty pár stojí vedle sebe. Pak

$$\begin{aligned} (2n)! - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= (2n)! - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} |\cap_{i \in I} A_i| = (2n)! - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} (2n-i)! \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (2n-i)!. \end{aligned}$$

10. Kolik existuje možností, jak rozmístit n rozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek, tak že žádná přihrádka nesmí být prázdná?

Řešení:

$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^n$, detaily viz řešení cvičení č. 2.