

Diskrétní matematika - cvičení č. 4

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

22. oktobra 2025

1. Na každé políčko hracího plánu $n \times n$ náhodně nakreslíme šipku doprava nebo dolů a na levé horní políčko postavíme robota. Robot se vždy posouvá na sousední políčko ve směru šipky. Jaká je pravděpodobnost, že robot opustí hrací plán krokem z pravého dolního políčka?

Řešení:

Spočteme počet cest vedoucích z levého horního rohu do pravého dolního rohu. Každá cesta se skládá z $n - 1$ kroků doprava a $n - 1$ kroků dolů, spolu je $\binom{2(n-1)}{n-1}$ uspořádání těchto kroků, tedy tolik je i cest. Každá cesta má pravděpodobnost $\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$, protože na každém z $2(n-1)$ políček musí být robot navigovaný šipkou otočenou správným směrem, což má pravděpodobnost $\frac{1}{2}$. Celková pravděpodobnost je tedy

$$\binom{2(n-1)}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}.$$

2. Necht' A a B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?

Řešení:

Ne nutně. Pokud jsou A a B neslučitelné, pak $P[A \cap B] = 0$. Pro nezávislé jevy by ale mělo platit $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$. To je možné pouze tehdy, pokud alespoň jeden z jevů má pravděpodobnost 0.

3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
- b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?
- c) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1. kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?

Řešení:

- a) Na kockách může padnout součet 8 v následujících případech: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Celkem je tedy 5 možností, z nich pouze ve dvou případech padla šestka, a to v (2,6) a (6,2). Tedy

$$P[\text{padla šestka} | \text{součet byl 8}] = \frac{2}{5}.$$

- b) $P[\text{padla šestka}] = \frac{11}{36}$, ale $P[\text{padla šestka} | \text{součet byl 8}] = \frac{2}{5} \neq \frac{11}{36}$.

c)

$$\begin{aligned} P[\text{padla šestka na 1. kostce} | \text{alespoň jedna šestka}] &= \frac{P[\text{šestka na 1. kostce a alespoň 1 šestka}]}{P[\text{alespoň jedna šestka}]} \\ &= \frac{P[\text{padla šestka na 1. kostce}]}{1 - P[\text{žádná šestka}]} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

4. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy

$$A = [\text{na modré kostce padlo sudé číslo}],$$

$$B = [\text{na zelené kostce padlo liché číslo}],$$

$$C = [\text{součet čísel je lichý}].$$

Jsou náhodné jevy A, B, C po dvou nezávislé? Jsou jevy A, B, C nezávislé?

Řešení:

- $P[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P[B] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P[C] = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$
- $P[A \cap B] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P[A] \cdot P[B].$
- $P[A \cap C] = P[A \cap B] = P[A] \cdot P[C].$
- $P[B \cap C] = P[A \cap B] = P[B] \cdot P[C].$
- $P[A \cap B \cap C] = P[A \cap B] = \frac{1}{4} \neq P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] = \frac{1}{8}.$

Jevy A, B, C jsou po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé.

5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
- b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

Řešení:

a)

$$\begin{aligned} P[\text{dlouhé vlasy}] &= P[\text{dlouhé vlasy}|\text{chlapec}] \cdot P[\text{chlapec}] + P[\text{dlouhé vlasy}|\text{dívka}] \cdot P[\text{dívka}] \\ &= 0.1 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.07 + 0.24 = 0.31. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P[\text{dívka}|\text{dlouhé vlasy}] &= \frac{P[\text{dlouhé vlasy}|\text{dívka}] \cdot P[\text{dívka}]}{P[\text{dlouhé vlasy}]} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.31} \approx 0.7742. \end{aligned}$$

6*. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \dots$ Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu.

- a) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
- b) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?

Řešení:

a)

$$\begin{aligned}
P[\text{odměna}] &= \sum_{k=1}^{\infty} P[\text{odměna} | k \text{ mincí}] \cdot P[k \text{ mincí}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2 \cdot 3)^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = 2 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5} = 0.4.
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že odměnu nedostaneme, je tedy $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$, což je větší než pravděpodobnost, že odměnu dostaneme.

b)

$$\begin{aligned}
P[n \text{ mincí} | \text{žádná odměna}] &= \frac{P[\text{žádná odměna} | n \text{ mincí}] \cdot P[n \text{ mincí}]}{P[\text{žádná odměna}]} \\
&= \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{2}{3^n}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot \frac{2}{3^n}.
\end{aligned}$$

7*. Karel, Franta a Cyril postupně hází kostkou v pořadí $K \rightarrow F \rightarrow C$. Komu první padne šestka, ten vyhrává, a hra v takovém případě končí.

a) Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Cyril?

b) Jaká je pravděpodobnost, že Franta hodil kostkou právě k -krát?**Řešení:**

a)

$$\begin{aligned}
P[\text{Cyril vyhraje}] &= \sum_{n=1}^{\infty} P[\text{Karel ne, Franta ne, Cyril ne}]^{n-1} \cdot P[\text{Karel ne, Franta ne, Cyril ano}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6}^{3n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5^2}{6^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5^3}{6^3}\right)^n = \frac{25}{216} \cdot \frac{1}{1 - \frac{125}{216}} = \frac{25}{216} \cdot \frac{216}{91} = \frac{25}{91} \approx 0.2747.
\end{aligned}$$

$$b) P[\text{Franta hodil kostkou právě } k\text{-krát}] = \frac{5^{k-1}}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5^k}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5^{k+1}}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

8. V krabici máme b bílých a a černých koulí. Postupně je taháme ven bez vracení.

a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním tahu? A ve druhém?

b) Jaká je pravděpodobnost, že $(n + 1)$ -ní tažená koule bude bílá?**Řešení:**

- a) Pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním tahu, je $\frac{b}{a+b}$. Pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli ve druhém tahu, je

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} = \frac{b}{a+b}.$$

- b) Indukcí lze dokázat, že pravděpodobnost, že $(n+1)$ -ní tažená koule bude bílá, je také $\frac{b}{a+b}$.

9. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance, který byl jednou střelou trefen. Určete pravděpodobnost toho, že kance zastřelil první, druhý nebo třetí střelec, jsou-li pravděpodobnosti zásahu po řadě rovny 0.2, 0.4 nebo 0.6.

Řešení:

$$P[\text{trefil první} | \text{byl trefen 1 zásahem}] = 0.2 \cdot (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.6) = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.048.$$

$$P[\text{trefil druhý} | \text{byl trefen 1 zásahem}] = 0.4 \cdot (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.6) = 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.4 = 0.128.$$

$$P[\text{trefil třetí} | \text{byl trefen 1 zásahem}] = 0.6 \cdot (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.4) = 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.6 = 0.288.$$