

# Diskrétní matematika - cvičení č. 3

web: [http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm\\_zs\\_25\\_26](http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26)

22. oktobra 2025

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti kostkami budou mít alespoň tři z nich hodnotu alespoň 3.

**Řešení:**

$$\begin{aligned} P[\text{alespoň 3 kostky mají hodnotu } \geq 3] &= 1 - P[\text{max 2 kostky mají hodnotu } \geq 3] \\ P[\text{max 2 kostky mají hodnotu } \geq 3] &= P[0 \text{ kostek má hodnotu } \geq 3] \\ &\quad + P[1 \text{ kostka má hodnotu } \geq 3] \\ &\quad + P[2 \text{ kostky mají hodnotu } \geq 3] \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^6 + 6 \left(\frac{4}{6}\right)^1 \left(\frac{2}{6}\right)^5 + 15 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^4 \\ &= \frac{73}{729} \approx 0.1001. \end{aligned}$$

2. Z balíčku 32 karet náhodně vybereme postupně čtyři karty (s vrácením).

- a) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli čtyři různé karty?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli právě dvě esa?
- c) Jaká je pravděpodobnost, že jsme vytáhli alespoň dvě esa?
- d) Jak by se změnily pravděpodobnosti z (a), (b), (c), pokud bychom tahy prováděli bez vrácení?

**Řešení:**

$$\text{a) } P[4 \text{ různé karty}] = \frac{\text{počet vyhovujících čtveric}}{\text{počet všech čtveric}} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{32^4} = \frac{27000}{32768} \approx 0.823.$$

$$\text{b) } P[2 \text{ esa}] = \frac{\text{počet vyhovujících čtveric}}{\text{počet všech čtveric}} = \frac{4^2 \cdot 28^2}{32^4} = \frac{12544}{1048576} \approx 0.0120.$$

$$\text{c) } P[\geq 2 \text{ esa}] = P[2 \text{ esa}] + P[3 \text{ esa}] + P[4 \text{ esa}] = \frac{4^2 \cdot 28^2 + 4^3 \cdot 28 + 4^4}{32^4} = \frac{14592}{1048576} \approx 0.0139.$$

d) Bez vrácení:

$$\text{a) } P[4 \text{ různé karty}] = 1$$

$$\text{b) } P[2 \text{ esa}] = \frac{4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \binom{4}{2}}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{54432}{863040} \approx 0.0631.$$

$$\text{c) } P[\geq 2 \text{ esa}] = 1 - P[0 \text{ es}] - P[1 \text{ eso}] = 1 - \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{\frac{32!}{28!}} - \frac{4 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot \binom{4}{1}}{\frac{32!}{28!}} = \frac{57144}{863040} \approx 0.0662.$$

3. Házíme postupně šesti kostkami — modrou, zelenou a čtyřmi oranžovými.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že na modré kostce padne sudé číslo?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že čísla, která padla na modré a zelené kostce, mají sudý součet a lichý součin?

- c) Jaká je pravděpodobnost, že čísla, která padla na modré a zelené kostce, mají sudý součet nebo lichý součin?
- d) Jaká je pravděpodobnost, že součet hodnot na oranžových kostkách je  $< 7$ ?
- e) Jaká je pravděpodobnost, že posloupnost hodnot, které padly na jednotlivých kostkách je monotónní?
- f) Jaká je pravděpodobnost, že maximální hodnota, která padla na šesti kostkách, je 5?

### Řešení:

a)  $P[\text{modrá sudá}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

b)  $P[\text{sudý součet a lichý součin}] = P[\text{modrá lichá a zelená lichá}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = 0.25.$

c)

$$P[\text{sudý součet nebo lichý součin}] = P[\text{modrá lich. a zelená lich.}] + P[\text{modrá sud. a zelená sud.}]$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

d)

$$P[\text{součet oranžových} < 7] = \frac{\text{počet vyhovujících čtveric}}{\text{počet všech čtveric}} = \frac{1 + 4 + 6}{6^4} \approx 0.0085.$$

- e) Spočteme monotónní posloupnosti. Každá šestice hodnot, která na kostkách padla, má právě 2 monotónní uspořádání (neklesající a nerostoucí). Máme 6 hodů a v každém hodu může padnout 6 různých hodnot. To je stejné, jako mít 6 přihrádek očíslovaných  $1, 2, \dots, 6$  jakožto hodnoty, které padly na kostkách a mít 6 nerozlišitelných kuliček, které rozdělujeme do těchto přihrádek podle toho, kolikrát daná hodnota padla. Celkem tedy počet monotónních posloupností je  $2 \cdot \binom{6+6-1}{6} = 2 \cdot \binom{11}{5} = 924.$
- $$P[\text{monotónní posloupnost}] = \frac{\text{počet vyhovujících šestic}}{\text{počet všech čtveric}} = \frac{924}{6^6} = \frac{924}{46656} \approx 0.0198.$$

f)

$$P[\text{maximum} = 5] = P[\text{všechny hodnoty} \leq 5] - P[\text{všechny hodnoty} \leq 4]$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^6 - \left(\frac{4}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} - \frac{4096}{46656} = \frac{11529}{46656} \approx 0.2472.$$

4. Najděte příklad tří jevů v nějakém pravděpodobnostním prostoru, z nichž každý dva jsou nezávislé, ale všechny tři nezávislé nejsou.

### Řešení:

Uvažujme pravděpodobnostní prostor  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  s rovnoměrným rozdělením pravděpodobností. Definujme jevy:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 3\}$

- $C = \{1, 4\}$

Pak platí:

- $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$

**5\*.** Karel, Franta a Jarda se rozhodli, že si zahrají tenis. Karel se s nimi vsadil o kilo čokolády, že vyhraje dvakrát po sobě. Může si vybrat ze dvou možností: buď bude hrát nejprve s Frantou, pak s Jardou a nakonec s Frantou, nebo nejprve s Jardou, pak s Frantou a nakonec s Jardou. Kterou z možností si má zvolit, jestliže ví, že Jarda hraje podstatně lépe než Franta, aby zvýšil svoji šanci na výhru?

**Řešení:**

Označme  $P_F$  pravděpodobnost, že Karel vyhraje nad Frantou a  $P_J$  pravděpodobnost, že Karel vyhraje nad Jardou, pak  $P_J < P_F$ . První možnost (Franta, Jarda, Franta):

$$\begin{aligned} P_1 &= P[\text{výhra, výhra, výhra}] + P[\text{prohra, výhra, výhra}] + P[\text{výhra, výhra, prohra}] \\ &= P_F P_J P_F + (1 - P_F) P_J P_F + P_F P_J (1 - P_F) \\ &= P_F P_J (2 - P_F). \end{aligned}$$

Druhá možnost (Jarda, Franta, Jarda):

$$P_2 = P_J P_F (2 - P_J)$$

Pretože  $P_J < P_F$ , platí  $2 - P_J > 2 - P_F$  a tedy  $P_2 < P_1$ . Karel by si měl zvolit první možnost (Franta, Jarda, Franta).

**6\*.** Porovnáváme dva léky - superlék a extralék. Zvlášť pro zkoumanou skupinu žen i zvlášť pro zkoumanou skupinu mužů, vyšla vyšší pravděpodobnost vyléčení superlékem než extralékem. Vezmeme-li ale dohromady celou skupinu žen i mužů, vychází nám vyšší pravděpodobnost vyléčení extralékem. Jak je to možné?

**Řešení:**

Tento jev se nazývá Simpsonův paradox. Může nastat, pokud jsou ve skupinách ženy a muži rozdílné podíly pacientů léčených superlékem a extralékem. Například:

- Ženy: 90% vyléčených superlékem (9 z 10), 80% vyléčených extralékem (12 z 15)
- Muži: 70% vyléčených superlékem (63 z 90), 60% vyléčených extralékem (3 z 5)

Celkem:

- Superlék: 72 vyléčených z 100 (72%)
- Extralék: 15 vyléčených z 20 (75%)

I když superlék má vyšší pravděpodobnost vyléčení v obou skupinách, celkově má extralék vyšší pravděpodobnost vyléčení kvůli rozdílným podílům pacientů v jednotlivých skupinách.