

Diskrétní matematika - cvičení č. 2

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

8. oktobra 2025

Kombinatorické počítání

1. Mějme n stejných kuliček, které chceme rozmístit do p očíslovaných přihrádek (rozmístíme úplně všechny kuličky). Kolika způsoby to můžeme udělat, jestliže:

- a) v každé přihrádce může být nejvýš jedna kulička?
- b) v každé přihrádce musí být aspoň jedna kulička?
- c) není žádné omezení na počet kuliček v přihrádkách?

A jak se změní odpovědi, když budou kuličky různobarevné (v tomto případě můžete část b) přeskočit, ukážeme si ji až později)?

Řešení:

Nerozlišitelné kuličky:

- a) Pokud $n > p$, tak je odpověď 0, protože v každé přihrádce může být nejvýš jedna kulička. Pokud $n \leq p$, tak je odpověď $\binom{p}{n}$, protože vybíráme n přihrádek z p a do těchto přihrádek umístíme kuličky.
- b) Pokud $n < p$, tak je odpověď 0, protože v každé přihrádce musí být aspoň jedna kulička. Pokud $n \geq p$, tak nejdříve do každé přihrádky dáme jednu kuličku (tím zajistíme, že v každé přihrádce bude aspoň jedna kulička) a pak už zbývá rozmístit $n - p$ kuliček do p přihrádek bez omezení. Podle části c) je tedy odpověď rovna $\binom{(n-p)+p-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}$.
- c) Odpověď je rovna počtu řešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$, kde x_i je počet kuliček v i -té přihrádce a $x_i \geq 0$. Tento počet je roven $\binom{n+p-1}{p-1}$ (můžeme si to představit jako uspořádání n kuliček a $p-1$ přepážek, které dělí kuličky do p skupin, přičemž počet kuliček před první přepážkou je počet kuliček v první přihrádce, počet kuliček mezi první a druhou přepážkou je počet kuliček ve druhé přihrádce atd., třeba takhle $|ooo||o|\dots$).

Různobarevné kuličky:

- a) Pokud $n > p$, tak je odpověď 0, protože v každé přihrádce může být nejvýš jedna kulička. Pokud $n \leq p$, tak je odpověď $\binom{p}{n} \cdot n!$, protože vybíráme n přihrádek z p a do těchto přihrádek umístíme kuličky (kuličky jsou různobarevné, takže záleží na pořadí).
- b) Pokud $n < p$, tak je odpověď 0, protože v každé přihrádce musí být alespoň jedna kulička. Pokud $n \geq p$, tak spočteme počet možností, kdy je alespoň jedna přihrádka prázdná. K tomu využijeme princip inkluze a exkluze, který bude v kurzu později. Označme A_i jako množinu všech rozdělení, kde je i -tá přihrádka prázdná. Potom

počet možností, kdy je alespoň jedna přihrádka prázdná, je roven

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p| &= \sum_{i=1}^p |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq p} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &= \binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} 1^n. \end{aligned}$$

Celkový počet možností je p^n , takže počet možností, kdy v každé přihrádce je alespoň jedna kulička, je roven

$$p^n - \left(\binom{p}{1}(p-1)^n + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} 1^n \right) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^n.$$

c) Odpověď je rovna p^n , protože každá kulička může být umístěna do libovolné z p přihrádek.

2. Kolik je k -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takých, že neobsahují 2 po sobě jdoucí čísla?

Řešení:

Nechť $\{a_1, \dots, a_k\}$ je k -prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ taková, že neobsahuje dvě po sobě jdoucí čísla a platí $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Pak můžeme vytvořit novou množinu $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, kde $b_i = a_i - (i-1)$.

Pak $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-k+1\}$, protože $a_k \leq n$ a tedy

$$b_k = a_k - (k-1) \leq n - (k-1) = n - k + 1$$

a platí $|\{b_1, b_2, \dots, b_k\}| = k$. Pokud by totiž b_i bylo stejné jako b_j pro $i > j$, pak máme $a_i - (i-1) = a_j - (j-1)$, tedy $a_i - a_j = i - j$, což znamená, že $a_j, a_{j+1}, \dots, a_i$ jsou po sobě jdoucí, což je v rozporu s předpokladem.

Naopak, pokud $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-k+1\}$, přičemž $b_1 < b_2 < \dots < b_k$, tak můžeme vytvořit podmnožinu $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takovou, že $a_i = b_i + (i-1)$ a tato podmnožina nebude obsahovat dvě po sobě jdoucí čísla. Kdyby $a_i + 1 = a_{i+1}$, tak $b_i + i - 1 + 1 = b_{i+1} + i$, z čehož $b_i = b_{i+1}$, což je spor.

Tím jsme ukázali bijekci mezi k -prvkovými podmnožinami množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takými, že neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla a k -prvkovými podmnožinami množiny $\{1, 2, \dots, n-k+1\}$. Počet těchto podmnožin je tedy roven $\binom{n-k+1}{k}$. $\square$

3. Dvanáct kamarádů se domluvilo na hraní volejbalu, ale Jirka na poslední chvíli onemocněl. Jak se tím změní počet možností rozdělení na dva týmy (t.j. z dvou týmů po šesti na situaci, kdy v jednom je o hráče méně)?

Řešení:

Původně jsme měli 12 kamarádů a chtěli jsme je rozdělit na dva týmy po 6. Počet možností, jak to udělat, je $\frac{1}{2} \binom{12}{6} = \frac{1}{2} \cdot \binom{11}{5} + \binom{11}{6} = \binom{11}{5}$ (dělíme dvěma, protože nezáleží na pořadí týmů).

Po Jirkově onemocnění máme 11 kamarádů a chceme je rozdělit na dva týmy, jeden s 5 a druhý s 6. Počet možností, jak to udělat, je $\binom{11}{5}$.

Tedy vidíme, že počet možností se odchodem Jirky nezměnil. $\square$

4. Kolik je způsobů, jak postavit věž z 5 zelených, 4 červených a 3 modrých kostek? Kostky jedné barvy jsou vzájemně nerozlišitelné.

Řešení:

Výsledek je $\frac{12!}{5!4!3!}$.

5. Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali (t.j. nestáli na sousedních políčkách)?

Řešení:

Pokud bílý král stojí na rohovém políčku, tak černý král může stát na jednom z $64 - 4 = 60$ políček. Pokud bílý král stojí na okrajovém (ale ne rohovém) políčku, tak černý král může stát na jednom z $64 - 6 = 58$ políček. Pokud bílý král stojí na vnitřním políčku, tak černý král může stát na jednom z $64 - 9 = 55$ políček. Bílý král může stát na 4 rohových, 24 okrajových a 36 vnitřních políčkách. Celkový počet možností je tedy

$$4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612.$$

□

Kombinační čísla a počítání dvěma způsoby

6. Dokažte $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Řešení:

Počet způsobů, jak vybrat $k + 1$ prvků z množiny $n + 1$ prvků, je roven $\binom{n+1}{k+1}$. Tento počet můžeme spočítat i jinak. Vybereme si jeden prvek z těch $n + 1$ a pak máme dvě možnosti:

- tento prvek vybereme - pak už musíme vybrat k prvků z n zbývajících, což můžeme udělat $\binom{n}{k}$ způsoby,
- tento prvek nevybereme - pak musíme vybrat $k + 1$ prvků z n zbývajících, což můžeme udělat $\binom{n}{k+1}$ způsoby.

Celkový počet možností je tedy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, což musí být rovno $\binom{n+1}{k+1}$. □

7. Dokažte $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$

Řešení:

Počet způsobů, jak vybrat r prvků z množiny n prvků a pak z těchto r prvků vybrat k prvků, je roven $\binom{n}{r} \binom{r}{k}$. Tento počet můžeme spočítat i jinak. Nejprve vybereme k prvků z n prvků, což můžeme udělat $\binom{n}{k}$ způsoby. Pak už musíme vybrat $r - k$ prvků z $n - k$ zbývajících, což můžeme udělat $\binom{n-k}{r-k}$ způsoby. Celkový počet možností je tedy $\binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$, což musí být rovno $\binom{n}{r} \binom{r}{k}$. □

8. Dokažte $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Řešení:

Spočteme, kolik je možností jak z n lidí vybrat libovolnou podmnožinu a z této podmnožiny vybrat jednoho vedoucího. Tento počet můžeme spočítat dvěma způsoby:

- Nejprve vybereme podmnožinu o velikosti k (máme na to $\binom{n}{k}$ možností) a pak z této podmnožiny vybereme vedoucího (máme na to k možností). Celkový počet možností je tedy $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- Nejprve vybereme vedoucího (máme na to n možností) a pak už můžeme vybrat libovolnou podmnožinu z $n-1$ zbývajících lidí (máme na to 2^{n-1} možností). Celkový počet možností je tedy $n2^{n-1}$.

Tedy $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. □

9. Dokažte $\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$

Řešení:

Spočteme, kolik je možností jak vybrat podmnožiny velikosti $n+1$ z množiny $\{1, 2, \dots, n+r+1\}$. Tento počet můžeme spočítat dvěma způsoby:

- Můžeme to udělat přímo, počet možností je $\binom{n+r+1}{n+1} = \binom{n+r+1}{r}$.
- Každá taková podmnožina obsahuje nějaké největší číslo m . Toto číslo může nabývat hodnot od $n+1$ do $n+r+1$. Pokud je největší číslo m , tak zbývá vybrat n čísel z množiny $\{1, 2, \dots, m-1\}$. Počet možností, jak to udělat, je tedy $\binom{m-1}{n}$. Celkový počet možností je tedy

$$\sum_{m=n+1}^{n+r+1} \binom{m-1}{n} = \sum_{i=0}^r \binom{n+i}{n} = \sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i}.$$

Tedy $\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$. □