

Diskrétní matematika - cvičení č. 11

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

17. decembra 2025

Rovinné grafy

1. Ukažte, že počet stěn v rovinném nakreslení grafu s $n \geq 3$ vrcholy je nejvýše $2n - 4$.

Řešení:

Pro rovinné grafy s $|V| \geq 3$ platí $|E| \leq 3|V| - 6$ a podle Eulerova vzorce

$$2 = |V| - |E| + |F| \geq |V| - 3|V| + 6 + |F| = 6 - 2|V| + |F|$$

a tedy $2(|V| - 2) \geq |F|$.

2. Dokažte, že pro graf nakreslený do roviny, který má v vrcholů, e hran, f stěn a k komponent souvislosti, platí $v + f = e + k + 1$.

Řešení:

Pro každou komponentu platí Eulerův vzorec $|V_i| - |E_i| + |F_i| = 2$. Sečteme-li tyto rovnice přes všechny komponenty, dostaneme

$$\sum_{i=1}^k |V_i| - \sum_{i=1}^k |E_i| + \sum_{i=1}^k |F_i| = 2k.$$

Protože $|V| = \sum_{i=1}^k |V_i|$, $|E| = \sum_{i=1}^k |E_i|$ a $|F| = \sum_{i=1}^k |F_i| - (k - 1)$, dostáváme

$$|V| - |E| + (|F| + k - 1) = 2k,$$

což lze upravit na požadovaný tvar $v + f = e + k + 1$.

3. Vymyslete obdobný odhad jako ve *Větě o odhadu hran* na počet hran vzhledem k počtu vrcholů v rovinném grafu, který neobsahuje žádný trojcyklus ani čtyřcyklus jako podgraf.

Řešení:

Každá stěna grafu, kde je alespoň 5 hran je ohraničena nejméně 5 hranami, každá hrana je součástí nejvíc dvou stěn, tedy $5|F| \leq 2|E|$. Z Eulerova vzorce dostaneme $2 + |E| - |V| = |F| \leq \frac{2}{5}|E|$, což lze upravit na $|E| \leq \frac{5}{3}(|V| - 2)$.

4. Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný, a najděte příklad co největšího rovinného grafu, jehož doplněk je rovinný.

Řešení: Rovinný graf s 11 vrcholy má nejvýše $3 \cdot 11 - 6 = 27$ hran. Doplněk grafu má tedy nejméně $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ hran a dle věty o odhadu hran není rovinný. Pro zbytek řešení viz <http://matematika.reseneulohy.cz/4114/doplanky-rovinnych-grafu>.

- 5*. Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

Řešení:

Pro rovinný graf G zestrojíme bipartitní graf s partitami A, B , kde v A jsou hrany grafu G a v B jsou vrcholy grafu G , každý nakopírovaný 3-krát. Hrana mezi e v A a vrcholem v

v B existuje právě tehdy, když hrana e je incidentní s vrcholem v v grafu G ($v \in e$). Pak pro libovolnou alespoň dvojprvkovou podmnožinu hran F grafu G označme X množinu vrcholů v G , které jsou incidentní s alespoň jednou hranou z F . Platí $|F| \leq 3|X| - 6$, protože podgraf grafu G tvořený vrcholmi X je rovinný. Protože v B je každý z vrcholů X nakopírován 3-krát, $3|X| > |F|$, je splněna Hallova podmínka pro existenci perfektního přiřazení v bipartitním grafu. (Pro jednoprvkové podmnožiny F je podmínka splněna triviálně.) Hrany tedy zorientujeme tak, že hrana e směřuje od vrcholu v v B , ke kterému je přiřazena. Každý vrchol v G má tedy výstupní stupeň nejvýše 3. Pro detaily o Hallově podmínce viz třeba https://cs.wikipedia.org/wiki/Hallova_v%C4%9Bta.

Barevnost grafů

6. Jakou barevnost má cesta na $n \geq 2$ vrcholech? A co kružnice na n vrcholech? Jakou barevnost může mít strom? Jakou největší barevnost může mít graf, v němž každý vrchol má stupeň nejvýše 100?

Řešení:

$\chi(P_n) = 2$, $\chi(C_n) = 2$ pro sudé n a $\chi(C_n) = 3$ pro liché n . Stromy jsou 2-barevné. Graf s maximálním stupněm 100 může mít barevnost nejvýše 101 (např. úplný graf K_{101}).

7. Ukažte, že každý graf s maximálním stupněm d je $(d + 1)$ -barevný.

Řešení:

Obarvíme vrcholy postupně, vždy vybereme neobarvený vrchol a obarvíme ho nejmenší možnou barvou. Protože každý vrchol má nejvýše d sousedů, vždy bude k dispozici alespoň jedna z $d + 1$ barev.

8. Dokažte, že rovinný graf bez trojúhelníků jde obarvit čtyřmi barvami.

Řešení:

Nechť G je rovinný graf bez trojúhelníků. Podle věty o odhadu hran má $|E| \leq 2|V| - 4$. Z toho plyne, že průměrný stupeň vrcholu je menší než 4, tedy existuje vrchol v se stupněm nejvýše 3. Odebereme-li tento vrchol, zůstane nám menší rovinný graf bez trojúhelníků, který podle indukčního předpokladu lze obarvit čtyřmi barvami. Vrchol v pak můžeme obarvit jednou ze čtyř barev, která není použita jeho sousedy (protože jich má nejvýše 3).

9. Kaktus je zobecnění stromu: souvislý graf, ve kterém každá hrana leží na nejvýše jednom cyklu. (Jinými slovy lze ho vytvořit postupným lepením cyklů a samostatných hran za vrcholy tak, aby nevznikl žádný další cyklus.) Dokažte, že kaktusy mají barevnost nejvýše 3.

Řešení: Viz <http://matematika.reseneulohy.cz/4327/barevnost-kaktusu>

10*. Pomocí věty o čtyřech barvách dokažte, že v každém rovinném 3-regulárním grafu (každý vrchol má stupeň 3) bez mostů můžeme obarvit hrany třemi barvami (tak, aby hrany sdílející vrchol měly různou barvu).

Řešení: Z věty o čtyřech barvách plyne, že stěny grafu G lze obarvit čtyřmi barvami. Každá hrana sousedí s právě dvěma stěnami (graf je bez mostů), hrany tedy obarvíme následovně:

- hrany mezi stěnami obarvenými barvami 1 a 2 nebo barvami 3 a 4 obarvíme barvou A,
- hrany mezi stěnami obarvenými barvami 1 a 3 nebo barvami 2 a 4 obarvíme barvou B,
- hrany mezi stěnami obarvenými barvami 1 a 4 nebo barvami 2 a 3 obarvíme barvou C.

Protože každý vrchol je na hranici právě tří stěn, hrany vycházející z onoho vrcholu budou mít různé barvy.

11*(Shortlist 2016 C8). Určete nejmenší k , pro které lze obarvit k políček tabulky $2n \times 2n$ červeně tak, aby platilo následující: existuje právě jedno vydláždění dominy takové, že žádné domino neobsahuje dvě červená políčka.

Řešení:

Viz <https://www.imo-official.org/problems/IM02016SL.pdf>, strana 48