

Diskrétní matematika - cvičení č. 10

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

10. decembra 2025

Maximální a minimální prvky

1. Dokažte, že každé neprázdné konečné uspořádání má maximální prvek. Je to pravda i pro nekonečná uspořádání?

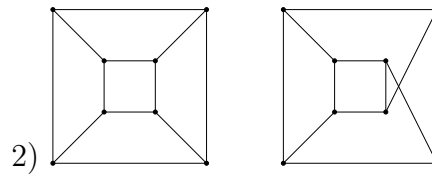
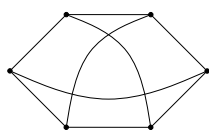
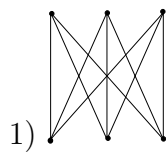
Řešení:

Nechť $(A, \leq)$ je neprázdné konečné uspořádání. Vyberme libovolný prvek $a_1 \in A$. Pokud je a_1 maximální, jsme hotovi. Jinak existuje prvek $a_2 \in A$ takový, že $a_1 < a_2$. Pokračujeme tímto způsobem. Protože je množina A konečná, tento proces musí skončit po konečném počtu krocích, kdy nalezneme maximální prvek.

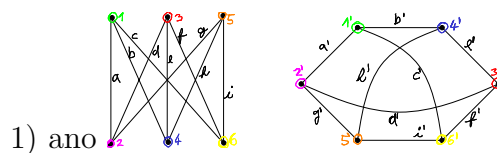
Tvrzení neplatí pro nekonečná uspořádání. Například množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ s obvyklým uspořádáním nemá maximální prvek.

Rovinné grafy

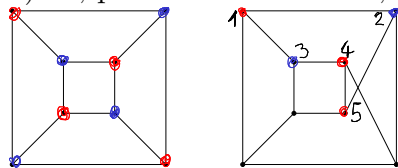
2. Rozhodněte, zda jsou následující dvojice grafů izomorfní. Proč?



Řešení:



2) ne, první lze obarvit tak, aby žádná hrana nespojovala vrcholy stejné barvy, druhý ne



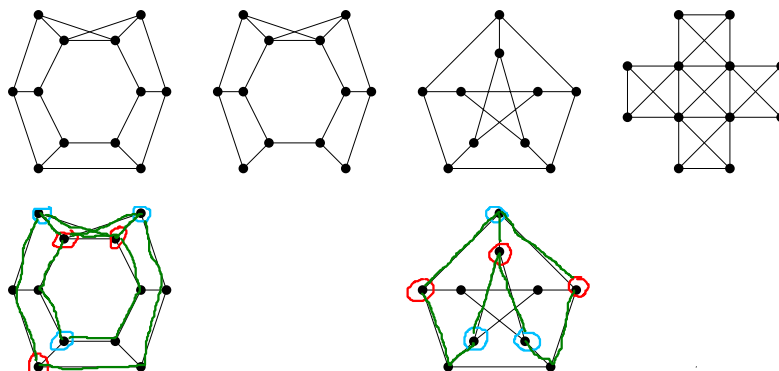
3. Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Řešení:

Nechť G je rovinný graf s 11 vrcholy. Podle věty o odhadu hran má nejvýše $3 \cdot 11 - 6 = 27$ hran. Doplněk grafu G má tedy nejméně $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ hran a dle věty o odhadu hran není rovinný.

4. Jsou následující grafy rovinné? Pokud ano, najděte rovinné nakreslení.

Řešení: Druhý a poslední jsou rovinné, první a třetí ne (obsahují dělení $K_{3,3}$).



5. Ukažte, že graf $K_{m,n}$ je rovinný právě tehdy, když $\min\{m, n\} \leq 2$.

Řešení: Když je m, n alespoň 3, pak $K_{m,n}$ obsahuje $K_{3,3}$ jako podgraf, a tedy není rovinný. Naopak, když je $\min\{m, n\} \leq 2$, pak lze $K_{m,n}$ snadno nakreslit bez překřížení hran (např. pro $K_{2,n}$ lze n vrcholů umístit na přímku, která rozdělí rovinu na dvě polroviny, zbylé 2 vrcholy umístíme do různých polrovin).