

Diskrétní matematika - cvičení č. 1

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

1. oktobra 2025

Matematická indukce

1. Dokažte matematickou indukcí $4 \mid (6n^2 + 2n)$.

Řešení:

Pro $n = 1$ platí $6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 8$, což je dělitelné 4. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy $4 \mid (6n^2 + 2n)$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n + 1$:

$$\begin{aligned} 6(n+1)^2 + 2(n+1) &= 6(n^2 + 2n + 1) + 2(n+1) \\ &= (6n^2 + 2n) + 4(3n + 2). \end{aligned}$$

Z předpokladu víme, že $6n^2 + 2n$ je dělitelné 4 a $4(3n + 2)$ je také dělitelné 4, tedy jejich součet je také dělitelný 4, čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

2. Dokažte Moivreovu větu: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$.

Řešení:

Pro $n = 1$ platí $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha).$$

Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= \cos(n\alpha) \cos \alpha - \sin(n\alpha) \sin \alpha + i(\sin(n\alpha) \cos \alpha + \cos(n\alpha) \sin \alpha) \\ &= \cos((n+1)\alpha) + i \sin((n+1)\alpha), \end{aligned}$$

kde při poslední rovnosti použijeme součtové vzorce pro $\cos$ a $\sin$. $\square$

3. Dokažte $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Řešení:

Pro $n = 1$ platí $\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1}{2}(1^2 + 1)$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n + 2n + 2) \\ &= \frac{1}{2}((n+1)^2 + (n+1)), \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

4. Dokažte $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Řešení:

Pro $n = 1$ platí $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{6(n+1)^2}{6} \\&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1),\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

5. Dokažte $\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$

Řešení:

Pro $n = 2$ platí $\prod_{i=2}^2 \frac{i-1}{i} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy $\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n+1$:

$$\prod_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i} = \left(\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} \right) \cdot \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

6. Dokažte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Řešení:

Pro $n = 0$ platí $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\&= \binom{n}{0} + \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \\&= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},\end{aligned}$$

kde jsme při první rovnosti využili Pascalův vzorec a při třetí rovnosti předpoklad indukce. □

7. Na šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar "L" a přitom zabírají tři políčka.

Řešení:

Pro $n = 1$ je šachovnice o rozměrech 2×2 a pokud jedno políčko chybí, zbylá tři políčka tvoří tvar "L", takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, tedy že šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ s jedním chybějícím políčkem lze vydláždit dlaždicemi tvaru "L". Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $n + 1$. Šachovnici o rozměrech $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ rozdělíme na čtyři čtverce o rozměrech $2^n \times 2^n$. Jedno z těchto políček má chybějící políčko, takže podle indukčního předpokladu lze tento čtverec vydláždit dlaždicemi tvaru "L". Pak umístíme dlaždici tvaru L tak, aby v každém ze zbylých 3 čtverců pokryla právě jedno políčko (nakreslete si obrázek). Pak opět podle indukčního předpokladu lze každý ze tří čtverců vydláždit dlaždicemi tvaru "L", čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

8*. Möbiova funkce je definována jako

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{pokud } n = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ pro prvočísla } p_1, \dots, p_r, \\ 0, & \text{pokud existuje prvočísla } p \text{ t.j. } p^2 \mid n. \end{cases}$$

Nejdřív dokažte, že pro $n > 1$ platí

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

a pak využijte tento fakt k důkazu toho, že součet primitivních n -tých odmocnin z jedné je roven $\mu(n)$. (Primitivní n -tá odmocnina z jedné je komplexní číslo z takové, že $z^n = 1$ a zároveň $z^k \neq 1$ pro žádné přirozené $0 < k < n$.)

Řešení:

Nejdřív dokažme, že pro $n > 1$ platí $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$. Stačí se kouknout pouze na takové dělitele d , že $\mu(d) \neq 0$, což je 1 a pak dělitele, kteří jsou součinem různých prvočísel (ale žádné z prvočísel se tam nevyskytuje ve vyšší mocnině než 1). Pokud je n rozložené na prvočísla jako $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$, pak každý takový dělitel d je určen výběrem podmnožiny z množiny $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ (prázdná podmnožina odpovídá děliteli 1). Tedy

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{S \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_r\}} (-1)^{|S|} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k = (1 - 1)^r = 0.$$

Všimneme si, že polynom $x^n - 1$ má kořeny právě n -té odmocniny z jedné (ale ne všechny jsou primitivní). Můžeme tedy psát

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^n (x - \omega_n^k),$$

kde $\omega_n = e^{2\pi i/n}$, to komplexní číslo na jednotkové kružnici, které s kladnou reálnou poloosou svírá úhel $\frac{2\pi}{n}$. Porovnáním koeficientů na pravé a levé straně dostaneme, že

$$0 = \sum_{k=1}^n \omega_n^k = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_n^{dk} = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_{\frac{n}{d}}^k = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_d^k.$$

A teď použijeme silnou indukci podle n . Pro $n = 1$ platí $\sum_{k=1}^1 \omega_1^k = \omega_1^1 = 1 = \mu(1)$. Nyní předpokládejme, že $n > 1$ a součet primitivních m -tých odmocnin z jedné je roven $\mu(m)$ pro všechna přirozená čísla $m < n$. Protože je $n > 1$, dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \omega_n^k = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=d}} \omega_n^k = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_{\frac{n}{d}}^k = \sum_{d|n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_d^k, \\ &= \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \mu(d) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_n^k = \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right) - \mu(n) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_n^k \\ &= 0 - \mu(n) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_n^k, \end{aligned}$$

kde při přechodu do druhého řádku rovností využíváme indukční předpoklad. Z posledního řádku tedy máme $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \omega_n^k = \mu(n)$, čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Princip holubníku

9. Na šachovnici 8×8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.

Řešení:

Uvažujme následující rozdělení šachovnice na 8 skupin:

8	7	6	5	4	3	2	1
1	8	7	6	5	4	3	2
2	1	8	7	6	5	4	3
3	2	1	8	7	6	5	4
4	3	2	1	8	7	6	5
5	4	3	2	1	8	7	6
6	5	4	3	2	1	8	7
7	6	5	4	3	2	1	8

Všimneme si, že věže stojící na políčkách se stejným číslem (v stejné skupině) se vzájemně neohrožují. Když nám na šachovnici stojí 33 věží a máme jen 8 skupin, tak podle principu holubníku alespoň jedna skupina musí obsahovat alespoň 5 věží. Tyto věže se pak vzájemně neohrožují. $\square$

10. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 60, která je tvořena samými prvočísly

Řešení:

Uvažujme aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 60 a prvním členem a , tedy $a, a+60, a+120, a+180, a+240, a+300, a+360$ a předpokládejme, že jsou to všechno prvočísla. Pokud je a dělitelné 7, tak už nutně $a = 7$, jenomže pak $a + 180 = 11 \times 17$. Můžeme tedy předpokládat, že a není dělitelné 7 a protože $7 < a + 60 < a + 120 < a + 180 < a + 240 < a + 300 < a + 360$, tak ani žádný z těchto členů není dělitelný 7. Takže tyto čísla dávají zbytky po dělení 7 z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Protože máme 7 členů a jenom 6 možných zbytků, tak podle principu holubníku alespoň dva členy musí dávat stejný zbytek po dělení 7. Pak tedy máme $7 \mid ((a + 60k) - (a + 60l))$ pro nějaká $0 \leq l < k \leq 6$, což znamená, že $7 \mid 60(k - l)$. Protože 7 a 60 jsou nesoudělná, tak musí platit $7 \mid (k - l)$, což je ale nemožné, protože $0 < k - l \leq 6$. Tím sme dokázali, že v aritmetické posloupnosti s diferencí 60 nemůže být více než 6 prvočísel. Příklad aritmetické posloupnosti s 6 prvočísly je 11, 71, 131, 191, 251, 311. $\square$

11. Během cvičení z diskrétky, na které se dostavilo pouze pět studentů, každý z těchto studentů právě dvakrát usnul. Ke každé dvojici těchto studentů existoval okamžik, kdy spali oba z dvojice současně. Dokažte, že existoval okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně.

Řešení:

Rozdělme si časovou osu na intervaly, kde nový interval začíná vždy tehdy, když někdo usne. Máme tedy $5 \times 2 = 10$ intervalů. Zároveň víme, že ke každé dvojici studentů existoval okamžik, kdy spali oba z dvojice současně, takovýchto okamžiků je $\binom{5}{2} = 10$. Pro spor předpokládejme, že v každém okamžiku spali nejvýše dva studenti. Pak každý interval může obsahovat nejvýše jeden z těchto okamžiků (jinak by v něm spali tři studenti současně). Protože v prvním intervalu spí jenom jeden student, tak tento interval neobsahuje žádný z okamžiků. Z principu holubníku tedy alespoň jeden z intervalů musí obsahovat alespoň dva z těchto okamžiků, čímž dostáváme spor. A tedy musel existovat okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně. $\square$