

Diskrétní matematika - cvičení č. 9

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

3. decembra 2025

Relace

1. U následujících relací si můžete vyzkoušet znázornění relace maticí, bipartitním grafem a orientovaným grafem.

a) $R_1 = \{(-2, 5), (5, 5), (5, -2), (0, 0)\}$ na množině $\{-2, 0, 5\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}; x \geq y\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \{1, \dots, 5\} \times \{4, \dots, 10\}; x \text{ a } y \text{ jsou nesoudělné}\}$

2. Určete, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, antisymetrické nebo tranzitivní:

a) $X = \{a, b, c\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

b) $X = \{a, b, c\}$ a $R = \{(a, a), (c, c)\}$

c) $(X, R) = (\mathbb{N}, \leq)$

d) $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ a $R = \{(x, y) \mid \text{nsd}(x, y) = 1\}$

3. Buďte R a S reflexivní/transitivní/symetrické relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní/transitivní/symetrické?

a) $R \cup S$

b) $R \cap S$

c) $R - S$

d) $S \circ R$

e) R^{-1}

4. Ukažte, že pro zobrazení $f: X \rightarrow X$ na konečné množině X platí, že f je prosté právě když f je na.

Platí totéž i pro nekonečné množiny X ?

5. Rozhodněte, zda jsou ekvivalence následující relace a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

a) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow p \mid (x - y)$ (zbytkové třídy modulo $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)

b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, xRy \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid x$

c) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z \mid y \wedge z \mid x$. Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

6. Uvažme neorientovaný graf G a relaci R na jeho vrcholech takovou, že uRv právě tehdy, když z u do v vede cesta.

- a) Ukažte, že R je ekvivalence.
- b) Určete třídy ekvivalence relace R
- c) Jak by se tato relace změnila, kdybychom místo existence cesty uvažovali existenci sledu?

7. Určete počet různých částečných uspořádání na čtyřech prvcích.

8. Rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud existuje, uveďte příklad.

- a) Uspořádání bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině.
- b) Uspořádání bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině.
- c) Uspořádání bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině.
- d) Uspořádání bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na nekonečné množině.
- e) Uspořádání bez největšího a bez maximálního prvku; na nekonečné množině.
- f) Uspořádání bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině.

9*(Erdős, Szekeres). Jsou dána přirozená čísla a, b . Ukažte, že z každé posloupnosti, jejíž členy se neopakují a která má délku $ab + 1$, lze vybrat rostoucí posloupnost délky $a + 1$ nebo klesající posloupnost délky $b + 1$.

10*(AUO 1972). Mějme 50 ne nutně různých intervalů. Dokažte, že alespoň osm z nich má společný neprázdný průnik, nebo alespoň osm z nich je po dvou disjunktních.

11*(MEMO 2012). Buď n přirozené číslo. Množinu $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ nazveme trojatomou, pokud neobsahuje tři členy a, b, c takové, že $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$. Určete největší možný počet prvků trojatomé množiny S .

Domácí úkol

1. Uvažujme uspořádání $\preceq_s$ na množině $\{1, 2, \dots, 2024\} \times \{1, 2, \dots, 2024\}$, kde $\forall (a, b), (x, y) \in \{1, 2, \dots, 2024\} \times \{1, 2, \dots, 2024\}$:

$$(a, b) \preceq_s (x, y) \iff a \leq x \wedge b \leq y.$$

Najděte nějaký nejdelší řetězec a nějaký největší antiretezec. Nezapomeňte zdůvodnit, proč toto uspořádání neobsahuje žádné delší řetězce ani větší antiřetězce. (5b)

2.

- a) Najděte relace R, S na téže množině X takové, že $R \circ S = S \circ R$. (2b)
- b) Najděte relaci R na vhodné množině X takovou, že $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \neq R^{n+1}$. Výraz R^n znamená n -násobnou kompozici relace R , tj. $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{n \text{ krát}}$. (3b)