

Diskrétní matematika - cvičení č. 8

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

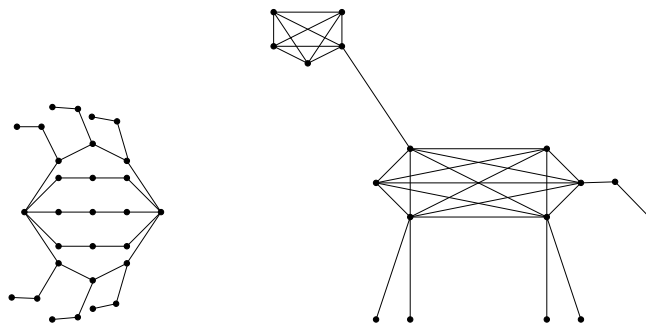
26. novembra 2025

Grafy

1. Ukažte, že když graf obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako indukovaný podgraf.
2. Existuje bipartitní graf s aspoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?
3. Ukažte, že každý graf s m hranami má bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.
- 4*. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.

Stromy

5. Najděte všechny stromy jejichž doplňkem je také strom. Zdůvodněte, že jste na žádný nezapomněli.
6. Kolik nejvíce a kolik nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?
7. Množině vrcholů grafu říkáme nezávislá, pokud žádné dva její vrcholy nejsou spojeny hranou. Dokažte, že každý strom na n vrcholech obsahuje nezávislou množinu velikosti aspoň $n/2$.
8. Kolik koster má cyklus na n vrcholech?
9. Existuje graf, který má právě dvě kostry? Pro která n existuje graf s právě n různými kostrami?
10. Kolik koster mají následující zvířátka?



11.

- a) Kolik je v grafu K_n koster, které obsahují právě dva vrcholy stupně většího než 1?
- b) Kolik je v grafu K_n koster, které obsahují právě tři vrcholy stupně 1?

12*. V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskóčit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat.¹ Vzdáleností dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. Osamělost enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.

Domácí úkol

1. Nechtě T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty vzniklé odebráním e lichý počet vrcholů. Dokažte, že všechny vrcholy T mají lichý stupeň. (4b)

2. Na šachovnici $m \times m$ je vybarveno $2m$ polí modře. Na jedno z těchto polí chceme umístit věž. Budeme s ní pohybovat vždy z modrého pole na modré pole, přičemž se mají tahy střídát vodorovně a svisle. Dokažte, že je možné umístit věž tak, aby při správném pohybu bylo vždy možné provést další tah. (6b)