

Diskrétní matematika - cvičení č. 7

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

19. novembra 2025

Grafy

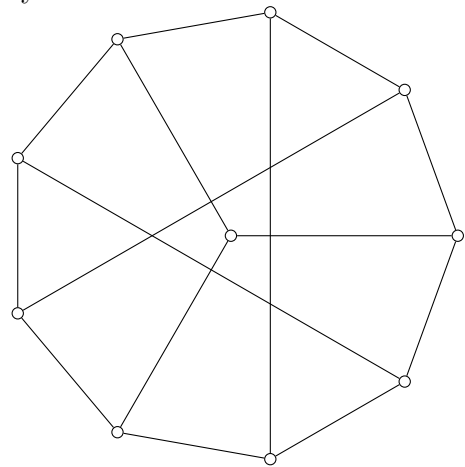
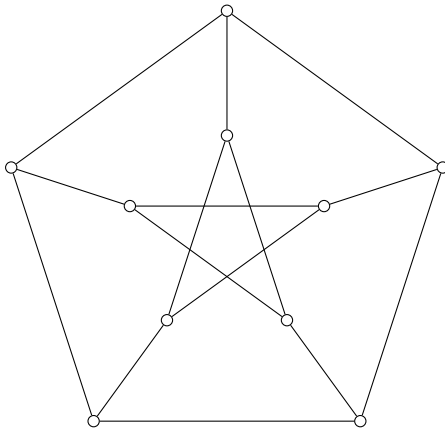
1. Uvažte množinu vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ a určete, kolik je na této množině různých (ale vzájemně izomorfních):

- (a) úplných grafů K_n ,
- (b) cest P_n ,
- (c) úplných bipartitních grafů $K_{k,n-k}$ v závislosti na k ,
- (d) disjunktních sjednocení dvou úplných grafů K_k a K_{n-k} v závislosti na k ,
- (e) grafů, v nichž má každý vrchol stupeň 1.

2. Jaký je maximální možný počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami?

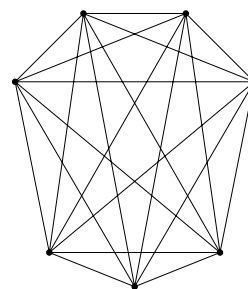
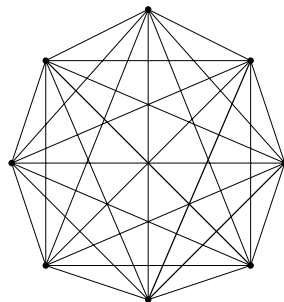
3. Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet souvislých částí grafu.

4. Najděte izomorfismus mezi následujícími dvěma grafy:



Dále rozhodněte, zda-li jsou izomorfní třetímu grafu F , danému vzorcem: $V_F = \binom{\{1, \dots, 5\}}{2}$, $E_F = \{(A, B) : A \cap B = \emptyset\}$.

5. Jdou následující grafy nakreslit jedním tahem?



6. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu lze rozložit na hranově disjunktní sjednocení kružnic. Je rozklad jednoznačný? Pokud ne, je počet kružnic v rozkladu dán jednoznačně?

7*. Dokážeme do roviny nakreslit devět úseček tak, aby každá protínala právě tři jiné úsečky?

Domácí úkol

1. Pro jaká $n \geq 1$ existuje graf na n vrcholech, jehož každý vrchol má jiný stupeň? (5b)

2. Mějme $n, k \in \mathbb{N}$ splňující $n \geq k \geq 3$. Kolik je kružnic délky k v úplném grafu na n vrcholech? (5b)