

Diskrétní matematika - cvičení č. 6

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

5. novembra 2025

PIE

1. Kolik je permutací na množině $\{1, \dots, n\}$ s právě jedním pevným bodem? Můžete použít, že permutací bez pevného bodu je $\tilde{s}(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$.
2. Označme $\varphi(n)$ počet čísel z $\{1, \dots, n-1\}$, která jsou nesoudělná s n . Dokažte, že je-li $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ prvočíselný rozklad čísla n , platí:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

3. Petr Štědrý pořádá každý večer večeři pro své přátele. Na večeři jsou pozvaní vždy tři hosté. Kolika způsoby může Petr rozeslat pozvánky pro svých 7 přátel na celý týden tak, aby každý z těchto sedmi přátel byl alespoň jednou pozván?
4. V celočíselné mřížce určete počet nejkratších cest mezi vrcholy $(0, 0)$ a $(10, 10)$, které neprocházejí žádným z bodů $(3, 2)$, $(6, 7)$ a $(2, 6)$.

Domácí úkol

1. Určete, koeficient u členu x^{30} ve výrazu $(5x^3 + 4x^2)^{12}$. (4b)
2. Anna a její přítel Jakub pořádají večírek, na který pozvali čtyři další páry. Během večírků si lidé podávají ruce, ale — samozřejmě — nikdo si nepotřásá rukou se svým vlastním partnerem. Na konci večírků se Anna zeptá ostatních, s kolika lidmi si kdo potřásl rukou, a dostane devět různých odpovědí. Kolika lidem potřásla rukou Anna a kolika Jakub? (6b)