

Diskrétní matematika - cvičení č. 2

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

8. oktobra 2025

Kombinatorické počítání

1. Mějme n stejných kuliček, které chceme rozmístit do p očíslovaných přihrádek. Kolika způsoby to můžeme udělat, jestliže:

- a) v každé přihrádce může být nejvýš jedna kulička?
- b) v každé přihrádce musí být aspoň jedna kulička?
- c) není žádné omezení na počet kuliček v přihrádkách?

A jak se změní odpovědi, když budou kuličky různobarevné (v tomto případě můžete část b) přeskočit, ukážeme si ji až později)?

2. Kolik je k -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ takých, že neobsahují 2 po sobě jdoucí čísla?

3. Dvanáct kamarádů se domluvilo na hraní volejbalu, ale Jirka na poslední chvíli onemocněl. Jak se tím změní počet možností rozdělení na dva týmy (t.j. z dvou týmů po šesti na situaci, kdy v jednom je o hráče méně)?

4. Kolik je způsobů, jak postavit věž z 5 zelených, 4 červených a 3 modrých kostek? Kostky jedné barvy jsou vzájemně nerozlišitelné.

5. Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali (t.j. nestáli na sousedních políčkách)?

Kombinační čísla a počítání dvěma způsoby

6. Dokažte $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

7. Dokažte $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}$

8. Dokažte $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

9. Dokažte $\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$

Domácí úkol

1. Ukažte, že jakákoli částka, která jde zaplatit pouze trojkorunami (více než jednou) jde zaplatit dvojkorunami a pětikorunami. (3b)
2. Ve Sněmu zasedá sto senátorů, dva z každého z 50 států. Kolika způsoby můžeme zvolit čtyřčlenný výbor tak, aby neobsahoval žádné dva senátory ze stejného státu? (3b)
3. Kolik je možností, jak rozdělit $3n$ lidí do třech týmů po n lidech a v každém týmu určit jednoho z jeho členů jako kapitána? (4b)