

Diskrétní matematika - cvičení č. 11

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

17. decembra 2025

Rovinné grafy

1. Ukažte, že počet stěn v rovinném nakreslení grafu s $n \geq 3$ vrcholy je nejvýše $2n - 4$.
2. Dokažte, že pro graf nakreslený do roviny, který má v vrcholů, e hran, f stěn a k komponent souvislosti, platí $v + f = e + k + 1$.
3. Vymyslete obdobný odhad jako ve *Větě o odhadu hran* na počet hran vzhledem k počtu vrcholů v rovinném grafu, který neobsahuje žádný trojcyklus ani čtyřcyklus jako podgraf.
4. Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný, a najděte příklad co největšího rovinného grafu, jehož doplněk je rovinný.
- 5***. Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

Barevnost grafů

6. Jakou barevnost má cesta na $n \geq 2$ vrcholech? A co kružnice na n vrcholech? Jakou barevnost může mít strom? Jakou největší barevnost může mít graf, v němž každý vrchol má stupeň nejvýše 100?
7. Ukažte, že každý graf s maximálním stupněm d je $(d + 1)$ -barevný.
8. Dokažte, že rovinný graf bez trojúhelníků jde obarvit čtyřmi barvami.
9. Kaktus je zobecnění stromu: souvislý graf, ve kterém každá hrana leží na nejvýše jednom cyklu. (Jinými slovy lze ho vytvořit postupným lepením cyklů a samostatných hran za vrcholy tak, aby nevznikl žádný další cyklus.) Dokažte, že kaktusy mají barevnost nejvýše 3.
- 10*. Pomocou věty o čtyřech barvách dokažte, že v každém rovinném 3-regulárním grafu (každý vrchol má stupeň 3) bez mostů můžeme obarvit hrany třema barvami (tak, aby hrany sdílející vrchol měly různou barvu).
- 11*(Shortlist 2016 C8). Určete nejmenší k , pro které lze obarvit k políček tabulky $2n \times 2n$ červeně tak, aby platilo následující: existuje právě jedno vydláždění dominy takové, že žádné domino neobsahuje dvě červená políčka.

Domácí úkol

1. Graf se nazývá vnějškově rovinný, pokud má rovinné nakreslení, v němž všechny vrcholy jsou nakreslené a hranici vnější stěny. Jakou největší barevnost může mít vnějškově rovinný graf? (5b)
2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Nechť G_n je graf, jehož vrcholy jsou všechny podmnožiny množiny $[n]$, přičemž dva různé vrcholy x a y jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou množiny x a y disjunktní. Jakou má graf G_n barevnost? (5 b)