

Diskrétní matematika - cvičení č. 10

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

10. decembra 2025

Maximální a minimální prvky

1. Dokažte, že každé neprázdné konečné uspořádání má maximální prvek. Je to pravda i pro nekonečná uspořádání?

Rovinné grafy

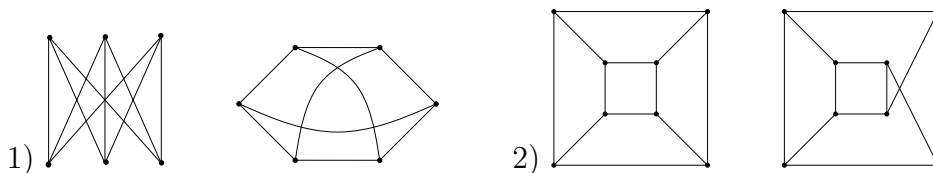
Definice (Izomorfismus grafů) Graf $G = (V_G, E_G)$ je *izomorfní* grafu $H = (V_H, E_H)$, pokud existuje bijekce $f : V_G \rightarrow V_H$ takové, že $\{u, v\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_H$. Taková bijekce f se nazývá *izomorfismus*.

Eulerův vzorec Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf, a nechť F je množina stěn v některém jeho nakreslení. Potom $|V| - |E| + |F| = 2$.

Věta o odhadu hran Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s aspoň třemi vrcholy. Potom $|E| \leq 3|V| - 6$. Pokud navíc G neobsahuje K_3 jako podgraf, tak $|E| \leq 2|V| - 4$.

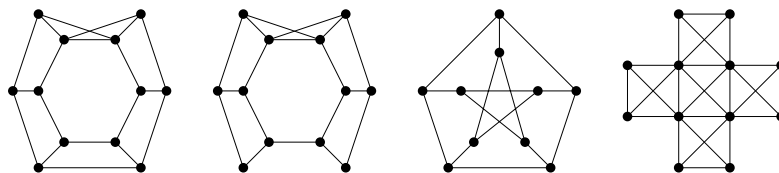
Kuratowského věta Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje žádné dělení K_5 ani žádné dělení $K_{3,3}$ jako podgraf.

2. Rozhodněte, zda jsou následující dvojice grafů izomorfní. Proč?



3. Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

4. Jsou následující grafy rovinné? Pokud ano, najděte rovinné nakreslení.



5. Ukažte, že graf $K_{m,n}$ je rovinný právě tehdy, když $\min\{m, n\} \leq 2$.

Domácí úkol

1. Obvodem grafu (který obsahuje kružnici) rozumíme délku nejkratší kružnice v tomto grafu obsažené. Mějme rovinný graf G s rovinným nakreslením takovým, že každá stěna, včetně vnější, je ohraničena kružnicí (speciálně tedy G neobsahuje žádné vrcholy stupňů 0 nebo 1, a naopak obsahuje alespoň jednu kružnici).

- a) Dokažte, že pokud obvod G je alespoň 6, potom G obsahuje vrchol stupně 2. (4 b)
- b) Dokažte, že pokud obvod G je alespoň 11, potom G obsahuje dva sousední vrcholy stupně 2. (4 b)
- c) Nalezněte graf s obvodem 10 (nebo s co největším obvodem), který neobsahuje dva sousední vrcholy stupně 2. (2 b)