

Diskrétní matematika - cvičení č. 1

web: http://gimli.ms.mff.cuni.cz/~natalia/dm_zs_25_26

1. októbra 2025

Matematická indukce

1. Dokažte matematickou indukcí $4 \mid (6n^2 + 2n)$.
2. Dokažte Moivreovu větu: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$.
3. Dokažte $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n)$.
4. Dokažte $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
5. Dokažte $\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$.
6. Dokažte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
7. Na šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ jedno náhodně vybrané políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi, která mají tvar "L" a přitom zabírají tři políčka.
- 8*. Möbiova funkce je definována jako

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{pokud } n = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ pro prvočísla } p_1, \dots, p_r, \\ 0, & \text{pokud existuje prvočíslo } p \text{ t.ž. } p^2 \mid n. \end{cases}$$

Nejdřív dokažte, že pro $n > 1$ platí

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$$

a pak využijte tento fakt k důkazu toho, že součet primitivních odmocnin z jedné je roven $\mu(n)$.

Princip holubníku

9. Na šachovnici 8×8 stojí 33 věží. Dokažte, že z nich lze vybrat 5, které se vzájemně neohrožují.
10. Hrací plán na "Člověče, nezlob se" je tvořen kružnicí s 36 políčky. Kolik nejméně potřebujeme figurek, abychom při jejich libovonném rozmístění a libovolném hoď kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou vyhodit?
11. Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 60, která je tvořena samými prvočíslly.
12. Během cvičení z diskrety, na které se dostavilo pouze pět studentů, každý z těchto studentů právě dvakrát usnul. Ke každé dvojici těchto studentů existoval okamžik, kdy spali oba z dvojice současně. Dokažte, že existoval okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně.