

Vieta jumping

Matěj Doležálek

Abstrakt. Počínaje úlohou číslo 6 z IMO 1988 lze v olympiádách narazit na magické úlohy, které požadují vyvodit ze zdánlivě tuctových dělitelností silné závěry. Metodou pro řešení takových úloh je často *Vieta jumping*. V této přednášce zkusíme Vieta jumping odebrat jeho magickou auru, prohlédnout si každou jeho přísadu zvlášť a získat hezkou obrázkovou představu pro přeskakování mezi kořeny.

Viětovy vztahy a geometrie

Tvrzení (Viětovy vztahy). Má-li polynom $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ kořeny $x_1, \dots, x_n$ (včetně násobností), pak platí

$$c_k = c_n (-1)^{n-k} \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |J|=n-k}} \prod_{i \in J} x_i.$$

Speciálně pro $n = 2$ a $c_2 = 1$ platí $x_1 + x_2 = -c_1$ a $x_1 x_2 = c_0$.

Úloha 1. Marian našel při potápění v Mariánském příkopě dva kvadratické polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, že polynom $P(Q(x))$ má čtyři reálné kořeny $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dokaž, že musí platit $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. (PraSe 43–1p–4)

Definice. Bod v rovině nazveme *racionálním*, pokud jsou všechny jeho souřadnice racionální čísla. Křivku v rovině nazveme *racionální*, pokud se dá zapsat jako množina řešení nějaké polynomální rovnice s racionálními koeficienty. *Stupněm* křivky rozumíme stupeň polynomu, který ji zadává. (Pak lze hovořit o křivkách *kvadratických* (neboli kuželosečkách), *kubických* apod.)

Pozorování. Nechtě racionální přímka protíná racionální křivku stupně n v n bodech (včetně násobností), z nichž $n - 1$ je racionálních. Potom už je n -tý průsečík také racionálních.

Úloha 2. Najdi všechna řešení $x^2 + y^2 = z^2$ v celých číslech.

Úloha 3. Dokaž, že když na kružnici v rovině leží tři různé racionální body, pak už jich na ní leží nekonečně mnoho.

Skákání

Pozorování. Pokud jsou a, b celá a rovnice $x^2 + ax + b = 0$ má jeden celočíselný kořen, pak je i její druhý kořen celočíselný.

Úloha 4. Pro kladné celé n řešte rovnici $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ v kladných celých číslech. Dokaž, že:

- (i) Pro $n = 2017$ neexistuje žádné řešení (a, b, c) .
- (ii) Pro $n = 2016$ je v každém řešení číslo a násobkem 3.
- (iii) Pro $n = 2016$ existuje nekonečně mnoho řešení. (MEMO 2016 T8)

Úloha 5. Je dáno nenulové celé číslo k . Dokaž, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje lichý počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y) , právě když je k dělitelné sedmi. (MO A-66-III-6)

Skákání s parametrem

Motto. Dělitelnost je jen rovnice s proměnnou navíc.

Úloha 6. Pro kladná celá čísla a, b je $\frac{a^2+b^2+1}{ab}$ celé číslo. Dokaž, že je to číslo 3.

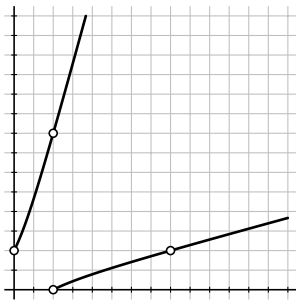
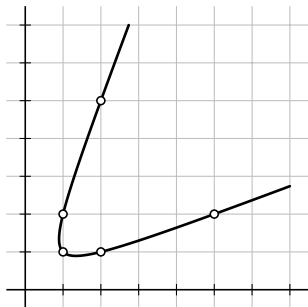
Řešení. Zafixujeme $k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}$ a řešíme $a^2 - kba + b^2 + 1 = 0$ jako kvadratickou rovnici v a . Kořeny pak splňují

$$a_1 + a_2 = kb, \quad a_1 a_2 = b^2 + 1.$$

Z první rovnice $a_1 = a \in \mathbb{Z} \implies a_2 \in \mathbb{Z}$, z druhé zas $a_1 = a > 0 \implies a_2 > 0$. Pro a_1 kladné celé tedy bude a_2 taky kladné celé.

Uvažme řešení $(a, b) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$ takové, že $a + b$ je minimální. Víme, že (a_2, b) bude taky řešení, takže $a_2 \geq a$. Z toho $a^2 \leq aa_2 = b^2 + 1$, analogicky taky $b^2 \leq a^2 + 1$. Dva kladné čtverce a^2, b^2 se liší nanejvýš o 1, což už vynucuje $a = b$.

Pak už snadno $a^2 \mid 2a^2 + 1$ implikuje $a = 1$, takže $k = 3$.



Úloha 7. Uvažujme kladná celá čísla a, b . Dokaž, že pokud je

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

celé číslo, pak už je to čtverec.

(IMO 1988/6)

Úloha 8. Kladná celá čísla a, b, c splňují $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$. Dokaž, že $a^2 + b^2 - abc$ je čtverec.

(Crux Mathematicorum)

Neočividné skákání

Úloha 9. Přirozená čísla a, b splňují $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Dokaž, že $a = b$.

(IMO 2007/5)

Úloha 10. Lichá přirozená čísla $m > n$ splňují $m^2 - n^2 + 1 \mid n^2 - 1$. Dokaž, že $m^2 - n^2 + 1$ je čtverec.

(Ireland 2005)

Další úlohy

Úloha 11. Najdi všechny dvojice kladných celých čísel a, b , pro něž je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ celé číslo.

Úloha 12. Dokaž, že v rovině lze zvolit nekonečnou množinu bodů

$$\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$$

tak, že pro celá čísla a, b, c leží P_a, P_b, P_c na jedné přímce, právě když $a+b+c = 2014$.

(USAMO 2014)

Úloha 13. Dokaž, že pro každé přirozené číslo m lze najít nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že x, y jsou nesoudělná, $x \mid y^2 + m$ a zároveň $y \mid x^2 + m$.

(ISL 1992)

Úloha 14. Řešme v kladných celých číslech rovnici $x^2 + y^2 - axy + 2 = 0$ s kladným celočíselným parametrem a . Dokaž, že pro $a = 4$ má rovnice nekonečně mnoho řešení, zatímco pro $a \neq 4$ neexistují žádná.

(Greece TST 2008)

Úloha 15. Existuje nekonečně mnoho dvojic přirozených čísel (x, y) takových, že

$$x \mid y^2 + y + 1 \quad \text{a zároveň} \quad y \mid x^2 + x + 1 \quad ?$$

Úloha 16. Je dáno kladné celé n . Nahlédni, že pro kladná celá a, b může výraz $\frac{a^2 + b^2 + n}{ab}$ nabývat jen konečně mnoha celočíselných hodnot.

Úloha 17. Dokaž, že dělitelnost $pq + 1 \mid p^2 + q^2$ nemá řešení v prvočíslech.

Úloha 18. Lichá kladná celá čísla a, b splňují $2ab + 1 \mid a^2 + b^2 + 1$. Dokaž, že $a = b$.

(Iran 2013)

Úloha 19. Najdi nejmenší kladné celé číslo n , pro něž existuje nekonečně mnoho n -tic $(a_1, \dots, a_n)$ kladných racionálních čísel takových, že

$$a_1 + \dots + a_n \quad \text{a} \quad \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

jsou celá čísla.

(ISL 2017 N6)

Úloha 20. Pro jistá přirozená x, y, k platí $\frac{x^2+1}{y^2} + 4 = k^2$. Dokaž, že $k = 3$.

Úloha 21. Budiž n kladné celé číslo, které není čtverec, a uvažujme rovnici

$$k = \frac{x^2 - n}{x^2 - y^2}.$$

Nechť je A množina těch kladných celých k , pro něž má rovnice celočíselné řešení s $x > \sqrt{n}$, zatímco B budiž množina těch kladných celých k , pro něž má rovnice celočíselné řešení s $0 \leq x < \sqrt{n}$. Dokaž, že $A = B$.

(ISL 2016 N5)

Úloha 22. Pro která kladná celá n má rovnice $x + y + z + w = n\sqrt{xyzw}$ řešení v kladných celých číslech?

(Vietnam 2002)

Úloha 23. Má pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = \frac{m}{a+b+c}$$

nekonečně mnoho řešení v kladných celých číslech?

(ISL 2002 N4)

Úloha 24. Najdi všechny celočíselné hodnoty výrazu

$$\frac{p^2 + q^2 + 1}{pq + 2}$$

pro prvočísla p, q .

Úloha 25. Jsou dána kladná celá čísla a, b . Dokaž, že

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

není čtverec.

(ISL 2019 N8)

Literatura a zdroje

Toto je zrevidovaná a proškrtaná verze přednášky, kterou jsem původně připravil na soustředění iKSka 2022.

[1] Filip Bialas: *Vieta jumping*, Paseky, 2018.

[2] Víťa Kala, Jakub „šněk“ Opršal: *Teorie čísel*, PraSečí seriál, 2008/2009.

Hinty

Hint 1. Jsou-li y_1, y_2 kořeny P , pak mají rovnice $Q(x) = y_1$ a $Q(x) = y_2$ stejný lineární koeficient.

Hint 2. Racionální přímky skrz jeden pevný bod na jednotkové kružnici.

Hint 3. Střed je racionální.

Hint 4. Pro první dvě části najdi správné modulo. V poslední najdi jedno řešení a skákej k větším a větším řešením.

Hint 5. Páruj ty body na elipse, které leží ve stejné výšce.

Hint 7. Zafixuj hodnotu a skákej k minimálnímu $a + b$. Nečtvercovost zařídí nenulovost absolutního členu. V případě záporného a_2 jej dosaď do zlomku a zkoumej znaménko.

Hint 8. Zafixuj $d = a^2 + b^2 - abc$ a skákej. Příklad záporného a_2 vyřeš podobně jako v IMO 1988.

Hint 9. Dostaň se k $4ab - 1 \mid (a - b)^2$. Potom by minimální řešení mělo dát odhad vedoucí ke sporu.

Hint 10. Substitute do součtu a rozdílu dá symetrii. Čtvercovost dělitele se doskazuje špatně, radši to nějak zaonač na čtvercovost podílu. Potom už řešení proběhne podobně jako IMO 1988.

Hint 11. Zafixuj hodnotu výrazu. Pokud je dost velká, skáčeš po dvojici přímek, a v tom jde pokračovat do nekonečna... (Alternativně řeš naBŮNOváním $\frac{a}{b}$ v základním tvaru.)

Hint 12. Vol body na té nejjednodušší z kubických křivek. Nepříjemnosti můžou vznikat kvůli $3 \nmid 2014$, ale dá se s nimi vypořádat.

Hint 13. Sluč dělitelnosti do jedné a pak z jednoho řešení skákej k dalším. Rozmysli si, že skákání zachová nesoudělnost.

Hint 14. Standardně doskákej k $x = y$.

Hint 15. Sluč dělitelnosti do jedné a skákej.

Hint 16. Jen si pořádně rozmysli, co se dělo v ukázkové úloze 6.

Hint 17. Začni u minimálního bodu na hyperbole a pořádně prozkoumej skákačí rekurence.

Hint 18. Skoky zachovávají paritu, lichost vyloučí skok na $a = 0$.

Hint 19. Malá n vysporuj. Potom vyráběj další a další řešení skákáním.

Hint 20. Substituu $z = x + ky$, $t = 2y$. Mimochodem, nebyla už tu nějaká úloha, kde vyšlo jen $k = 3$?

Hint 21. Přesubstituu do součtu a rozdílu, potom skákej po hyperbole. Bod na ose by znamenal čtvercové n .

Hint 22. Vieta jumpingem se dopravuj k odhadu $n \leq 6$ (nebo něco podobného), potom dořeš.

Hint 23. Aby skákání fungovalo, budeš si během něj muset hlídat nesoudělnost a dělitelnosti $a \mid bc + 1$ (plus cyklické záměny). Potom už stačí najít jedno m , pro něž takové řešení existuje.

Hint 24. Pro dost velké hodnoty podílu musí skákání projít přes bod na ose x nebo y . Odvoď, že skákačí rekurence pak bude vyrábět jen složená čísla. Zbývající malé podíly dořeš.

Hint 25. Nechť se výraz rovná c^2 pro nějaké $c > a$. Substitucí $x = c + a$, $y = c - a$ dostaneš symetričtější situaci. Ze skákání vytěžíš nerovnost, kterou je potřeba dovést ke sporu.