Úlohy navíc

Úloha 1. Rodinka 2018 koalů leží na přímce, přičemž vzdálenost každých dvou sousedních je 1. Na jednom z krajních koalů sedí blecha. Dokažte, že blecha umí postupně kousnout každého koalu, pokud použije pouze skoky délky $1, 2, \ldots, 2017$, každý právě jednou.

Úloha 2. Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y. Bodem X veďme přímku, která protíná kružnici k v bodě A a kružnici l v bodě C. Nyní i bodem Y veďme přímku. Ta protíná k v bodě B a l v bodě D. Dokažte $AB \parallel CD$.

Úloha 3. V rovině leží trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC jsou po řadě dány body K, L tak, že $|BK| = |BC| = |CL|$. Bod M je průsečík BL s CK a bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že $MI \perp BC$.

Úloha 4. Sečtěte:

- $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$,
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.

Úloha 5. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou E, F paty výšek po řadě z vrcholů B, C a H je průsečík výšek. Jsou-li M, N po řadě středy úseček BC, AH, dokažte, že $MN \perp EF$.

Úloha 6. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

Úloha 7. V trojúhelníku ABC splňujícím $|AB| < |BC|$ označme jako N střed toho oblouku AC na kružnici opsané, který obsahuje bod B. Dále jako M označme střed AC a jako I střed kružnice vepsané. Dokažte, že $|\sphericalangle IMA| = |\sphericalangle INB|$.

Úloha 8. V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termit. Tito termiti byli v nějakém pořadí označení čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Večer se každý termit nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Jediné, co termiti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termiti se součtem čísel 2019.

Úloha 9 (Cevova věta)**.** Na stranách BC, CA, AB trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body D, E, F. Dokažte, že pokud se přímky AD, BE, CF protínají v jednom bodě, pak platí

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

Užitečné odkazy

- Stránky kurzů: `https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/?page=courses`
- Návodné úlohy: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/6794412/a72i_nn.pdf`
- Matematický korespondenční seminář (PraSe): `https://prase.cz/commentary/aktualni.php`
- Mezinárodní korespondenční seminář (iKSko): `https://iksko.org/problems.php`