

Těžší úlohy navíc

Úloha 1. Kolika způsoby lze na šachovnici $n \times n$ rozmístit n věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly?

Úloha 2. Může existovat funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která pro každé $n \in \mathbb{N}$ splňuje $f(f(n)) < f(n)$? ($\mathbb{N}$ značí množinu kladných celých čísel.)

Úloha 3. Dokaž, že pro přirozená čísla a, b, c, d splňující $ab = cd$ platí

$$\text{NSD}(a, c) \cdot \text{NSD}(a, d) = a \cdot \text{NSD}(a, b, c, d).$$

Úloha 4. Pro která přirozená n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet v každém řádku i každém sloupci byl 0?

Úloha 5. Nechť $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Funkci $f : S \rightarrow S$ nazvěme *hezkou*, pokud pro každé $k \in S$ platí

$$\underbrace{f(f(\dots f(k) \dots))}_{f(k)\text{-krát}} = k.$$

Dokaž, že každá hezká funkce má alespoň $P + 1$ pevných bodů, kde P je počet prvočísel v intervalu $(\sqrt{n}, n)$. (*Pevným bodem* funkce myslíme takové x , že $f(x) = x$.)

Úloha 6. Na tabuli jsou v nějakém pořadí napsána čísla 1 až 2021 v řadě za sebou. V jednom kroku se podíváme na první číslo, nechť je to k , a obrátíme pořadí prvních k čísel – tedy $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ přepíšeme na $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1$. Dokaž, že po konečném počtu kroků dostaneme na první pozici jedničku.

Úloha 7. Nechť S je n^2 -prvková množina bodů v rovině se souřadnicemi (x, y) pro $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alespoň $\frac{5}{2}n - 1$ bodů z S je obarveno červeně. Dokaž, že nějaké čtyři červené body leží na jedné kružnici.

Úloha 8. Najdi všechny trojice (p, x, y) , kde p je prvočíslo, x a y jsou nezáporná celá čísla a platí $p^x = y^4 + 4$.

Úloha 9. Najdi všechna nezáporná celá čísla m, n splňující $|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3$.

Úloha 10 (Schurova věta). Je dán nekonstantní polynom $f(x)$ s celočíselnými koeficienty. Dokaž, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p , která pro nějaké celé číslo n dělí $f(n)$.

Užitečné odkazy

- Stránky kurzů: <https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/?page=courses>
- Návodné úlohy: <http://www.matematickaolympiada.cz/media/6713471/a71i-nn.pdf>
- Matematický korespondenční seminář (PraSe): <https://prase.cz/commentary/aktualni.php>
- Mezinárodní korespondenční seminář (iKSko): <https://iksko.org/problems.php>