

Přípravko 2021

Invarianty a monovarianty

Matěj Doležálek

Abstrakt. Příspěvek obsahuje úlohy na invarianty, monovarianty a obarvování. V ukázkách jsou jednoduché úlohy na představení jednotlivých typů úloh. Složitější úlohy jsou především z IMO shortlistů a národních olympiád.

Jednoduché invarianty

Za invariant chceme zvolit veličinu, která se zachovává při procesu popsaném v úloze. Pokud se v procesu vyskytuje nějaká volba z více možností, bývá dobré, aby invariant „smazal“ rozdíly mezi nimi.

Úloha 1. Drak má 100 hlav. Rytíř jich umí najednou useknout 15, 17, 20, nebo 5. Následně drakovi naroste v jednotlivých případech 24, 2, 14, nebo 17 hlav. Pokud drak nemá žádnou hlavu, zemře. Může drak zemřít?

Řešení. Nemůže. Každá z rytířových možností zachovává počet hlav mod 3. Přitom $100 \not\equiv 0 \pmod{3}$, takže drak nemůže přijít o všechny hlavy.

Úloha 2. Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána postupně čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Úloha 3. Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček, nebo dvojek?

Úloha 4. Je dáno 5 bodů: $(-5, 10)$, $(8, 7)$, $(-3, 4)$, $(6, 5)$, $(9, 4)$. Jsou povoleny následující dvě operace. Buď můžeme vybrat 2 body, jeden z nich posunout o jednotku nahoru a druhý o jednotku doprava, nebo vybereme 2 body a jeden nich posuneme o jednotku dolů a druhý o jednotku doleva. Najdi množinu všech bodů (x, y) takových, že po konečném počtu operací mohou být všechny body právě (x, y) .

Úloha 5. Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě celé kladné číslo N . Pokud není jednomístné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m , které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m - 3c|$. Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1204$, po úpravě tam bude $|120 - 3 \cdot 4| = 108$. Proces skončí, jakmile dostaneme jednomístné číslo.

Najděte všechna přirozená čísla N , z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0.

(62-A-III-4)

Jednoduché monovarianty

Monovarianty se hodí tam, kde chceme ukázat, že se nějaký proces zastaví. Občas se také v úlohách žádajících sestavení nějaké specifické konstrukce může monovariant hodit k postupnému vylepšování. Jako monovariant se často hodí nějaký součet nebo obecněji vážený součet, který v procesu bude klesat. V některých úlohách se ale může upotřebit i rostoucí veličina (kterou umíme shora omezit) nebo něco exotičtějšího jako lexikografické uspořádání.

Úloha 6 (folklor). V řadě leží n mincí. V každém kroku můžeme vzít minci, která leží orlem nahoru a otočit ji spolu se všemi mincemi napravo od ní. Můžeme toto provádět do nekonečna?

Řešení. Ne. Stav mincí reprezentuje binární číslo, které se v každém kroku zmenšuje.

Úloha 7. Každý senátor má nejvýše 3 nepřátele, nemůže být svým nepřítelem a nepřátelství je vzájemné. Dokaž, že umíme senát rozdělit na dvě frakce tak, že každý senátor má nejvýše jednoho nepřítele ve své frakci.

Úloha 8. Ve 123 ohradách je rozmístěno 1000 tuleňů a 1000 ptakopysků. Pro pohyb mezi ohradami platí, že buď tuleň jde z místnosti s více tuleni než ptakopysky do místnosti s více ptakopysky než tuleni (počítáno před jeho pohybem), nebo naopak ptakopysk jde z ohrady s více ptakopysky než tuleni do místnosti s více tuleni než ptakopysky (počítáno před jeho pohybem). Ukažte, že nastane situace, kdy se nebude moci žádný tvor pohnout.

Úloha 9. 2021 lidí je rozmístěno ve 100 pokojích. Každou minutu někdo přejde z jednoho pokoje do pokoje, kde je alespoň tolik lidí jako v pokoji, odkud vycházel. Ukažte, že po konečně mnoha krocích budou všichni v jedné místnosti.

Úloha 10. Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, z nichž každý má nejvýše $n - 1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozesadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Obarvování šachovnice

Objektu, který vznikne postupným spojováním čtverců, říkáme polyomino, speciálně polyomino velikosti n , kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ používáme pojmy monomino, domino, triomino, tetromino, pentomino. Pro kostky tetromina používáme označení I, L, O, S, T, což připomíná všech 5 typů kostek. Podobně u triomin máme I a L.

Nejčastěji se hodí různá obarvení podle součtu souřadnic mod n . Jednotlivé barvy pak vykreslí cyklicky se střídající diagonály, speciálně pro $n = 2$ je to klasické šachovnicové obarvení.

Úloha 11 (folklor). Z klasické šachovnice 8×8 odebereme dvě protější rohová políčka. Lze ji potom pokrýt pomocí domin?

Řešení. Nelze. Každé domino zakryje jedno bílé a jedno černé pole, ale černých a bílých políček není stejně mnoho.

Úloha 12. V levém dolním rohu šachovnice stojí kůň. Může proskákat všechna políčka šachovnice (každé navštívit právě jednou) a skončit v pravém horním rohu.

Úloha 13. Lze šachovnici 10×10 vyplnit T-tetrominy?

Úloha 14. Je možné vyplnit šachovnici 10×10 pomocí I-tetromin?

Úloha 15. Šachovnici 8×8 jsme pokryli 21 pomocí I-triomin tak, že právě 1 políčko zůstalo nepokryté. Kde může být toto volné políčko?

Úloha 16. Feldo našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o 1 políčko doprava, o 1 políčko hore alebo o 1 políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8 . Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?
(KMS, 2003/04, L1, 10)

Úloha 17. Ze šachovnice 10×10 jsme sebrali jeden rohový čtverec 5×5 . Jde zbytek pokrýt I-triominy?

Úloha 18. 200×200 square is colored like a chessboard. In one move, we can choose any 2×3 rectangle and switch the colors of all of its cells. Can we make all cells of the square be the same color?
(St Petersburg Olympiad 2010)

Úloha 19. V každém políčku desky $m \times n$ je napsáno přirozené číslo. V jednom kroku můžeme přičíst stejné celé číslo k číslům ve 2 sousedních polí, pokud obě čísla zůstanou nezáporná. Kdy můžeme po konečném počtu kroků dosáhnout stavu, že ve všech polích tabulky je 0?
(IMO Shortlist 1989)

Čísla v řadě, v kruhu a na hromádce

Úloha 20. Do kruhu je uspořádáno n lamp. Stav lampy je buď vypnutá, nebo zapnutá. V každém kroku se v jeden moment přepne (změní stav) každá lampa, která nesousedí s lampou stejného stavu. Pro jaká n se po nějakém počtu kroků už nezmění stav žádné lampy při libovolném počátečním rozdělení stavů?
(Kanada 1994, upraveno)

Úloha 21. Mějme na tabuli napsaná přirozená čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. V jednom tahu můžeme vybrat dvě čísla x_i a x_j taková, že ani jedno nedělí druhé a nahradit je postupně $\gcd(x_i, x_j)$ a $\text{lcm}(x_i, x_j)$. Ukaž, že můžeme udělat pouze konečně mnoho tahů.
(Putnam 2008)

Úloha 22. Several positive integers are written in a row. Iteratively, Alice chooses two adjacent numbers x and y such that $x > y$ and x is to the left of y , and replaces the pair (x, y) by either $(y + 1, x)$ or $(x - 1, x)$. Prove that she can perform only finitely many such iterations.
(IMO Shortlist 2012)

Úloha 23. Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A , 28 členů strany B , 23 členů strany C , 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

- Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?
- Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany. (59-A-III-3)

Úloha 24. Each term in a sequence $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ starting with the seventh is the sum of the last 6 terms mod 10. Prove that the subsequence $\dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ never occurs.

Úloha 25. V každém z vrcholů pravidelného n -úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to vždy právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. (58-A-III-5)

Úloha 26. Vrcholy n -úhelníka jsou očíslované reálnými čísly. Buďte a, b, c, d čtyři sousední čísla (v tomto pořadí). Je-li $(a - d)(b - c) < 0$, můžeme vyměnit b a c . Může být tato operace prováděna nekonečně dlouho?

Různé

Úloha 27 (provar). Na začátku je 9 ze 100 čtverců v mřížce 10×10 infikovaných. Pokud čtverec sousedí s alespoň 2 infikovanými čtverci, stane se takové infikovaným. Je možné, že nakonec budou všechny čtverce infikovány?

Úloha 28. Mějme (neuspořádanou) trojici $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b dva prvky naší trojice, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat trojici (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$, kde $|x - 4|, |y - 6|, |z - 12| < 1$?

Úloha 29. V každém políčku tabulky $m \times n$ je napsáno reálné číslo. V jednom kroku můžeme změnit znaménka u všech čísel v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Ukažte, že lze dosáhnout stavu, kdy bude součet v každém řádku i v každém sloupci nezáporný.

Úloha 30. V mřížce vyberme body $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$. V jednom tahu můžeme ve středové souměrnosti zobrazit bod podle jiného už označeného bodu. Můžeme se dostat k poslednímu bodu čtverce $D = (1, 1)$?

Úloha 31. Na nekonečné ledové ploše leží tři rozlišitelné puky tak, že nejsou v jedné přímce. Hokejista v jednom kroku vybere libovolný puk a prostřelí ho mezi dvěma

zbylými tak, aby neskončily v jedné přímce. Mohou po 2021ti krocích puky ležet ve stejných pozicích jako na začátku?

Úloha 32. V rovině je n červených a n modrých bodů. Žádné 3 neleží na přímce. Ukaž, že umíme najít n úseček spojujících červený a modrý bod, tak, že žádné 2 úsečky nemají společný bod.

Úloha 33. Na začátku je jen jedna kulička a ta je na pozici $(0, 0)$. Pokud je na pozici (i, j) kulička a na pozicích $(i, j + 1)$, ani $(i + 1, j)$ není, pak můžeme z pozice (i, j) odebrat kuličku a dát po 1 kuličce na pozice $(i + 1, j)$ a $(i, j + 1)$. Dokaž, že vždy budou existovat a a b , kde $a + b \leq 3$, taková, že na pozici (a, b) je kulička.

(Indie TST 2004)

Úloha 34. V bodě $(0, 0)$ jsou 4 kamínky. V jednom kroku můžeme odebrat kamínek z bodu (i, j) a umístit po 1 kamínku na $(i + 1, j)$ a $(i, j + 1)$. Dokažte, že po libovolném počtu kroků budou vždy v nějakém bodě alespoň 2 kamínky.

Úloha 35. Five identical empty buckets of 2-liter capacity stand at the vertices of a regular pentagon. Cinderella and her wicked Stepmother go through a sequence of rounds: At the beginning of every round, the Stepmother takes one liter of water from the nearby river and distributes it arbitrarily over the five buckets. Then Cinderella chooses a pair of neighbouring buckets, empties them to the river and puts them back. Then the next round begins. The Stepmother goal's is to make one of these buckets overflow. Cinderella's goal is to prevent this. Can the wicked Stepmother enforce a bucket overflow?

(IMO Shortlist 2009)

Co nemám vyřešené...

Úloha 36. Mějme k přepínačů v řadě. Každý přepínač ukazuje nahoru, doprava, dolů nebo doleva. Pokud tři sousední přepínače ukazují různými směry, jsou všechny přepnuty do čtvrtého směru. Ukažte, že se proces zastaví.

(BAMO 2006–5)

Úloha 37. A house has an even number of lamps distributed among its rooms in such a way that there are at least three lamps in every room. Each lamp shares a switch with exactly one other lamp, not necessarily from the same room. Each change in the switch shared by two lamps changes their states simultaneously. Prove that for every initial state of the lamps there exists a sequence of changes in some of the switches at the end of which each room contains lamps which are on as well as lamps which are off.

(IMO Shortlist 2005)

Úloha 38. On an infinite chessboard, a solitaire game is played as follows: at the start, we have n^2 pieces occupying a square of side n . The only allowed move is to jump over an occupied square to an unoccupied one, and the piece which has been jumped over is removed. For which n can the game end with only one piece remaining on the board?

(IMO 1993 P3)

Úloha 39. Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud na obvodu pětiúhelníku jsou x , y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$,

můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y$, $-y$, $y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (IMO 1986 P3)

Úloha 40. Ve vrcholech pětiúhelníka jsou napsána celá čísla tak, že jejich součet je 2011. V jednom kroku můžeme od každého ze dvou sousedních vrcholů odečíst libovolné m a k jejich protějším vrcholům přičíst $2m$. Ukaž, že pokud dosáhneme stavu, ve kterém jsou ve všech vrcholech kromě jednoho 0 a ve zbývajícím 2011, je tento „zbývajících“ vrchol určen počáteční konfigurací jednoznačně.

Úloha 41. A solitaire game is played on an $m \times n$ board with markers having one white side and one black side. Each of the mn cells contains a marker with its white side up, except for one corner square which has a marker with its black side up. The allowed move is to select a marker with black side up, remove it, and turn over all markers in squares sharing a side with the square of the chosen marker. Determine all pairs (m, n) for which it is possible to remove all markers from the board.

(IMO Shortlist 1998)

Úloha 42. There are n markers, each with one side white and the other side black, aligned in a row so that their white sides are up. In each step, if possible, we choose a marker with the white side up (but not one of the outermost markers), remove it and reverse the closest marker to the left and the closest marker to the right of it. Prove that one can achieve the state with only two markers remaining if and only if $n - 1$ is not divisible by 3.

(IMO Shortlist 2005)

Úloha 43. Máme 3 hromady kamenů. Z jedné hromady můžeme přehodit několik kamenů do druhé, pokud tím zdvojnásobíme počet kamenů ve druhé hromadě. Je možné takto zrušit některou hromadu?

(IMO Shortlist 1994)

Úloha 44. We have 2^m sheets of paper, with the number 1 written on each of them. We perform the following operation. In every step we choose two distinct sheets; if the numbers on the two sheets are a and b , then we erase these numbers and write the number $a + b$ on both sheets. Prove that after $m2^{m-1}$ steps, the sum of the numbers on all the sheets is at least 4^m .

(IMO Shortlist 2014)

Úloha 45. Let $n \geq 2$ be a positive integer and λ a positive real number. Initially there are n fleas on a horizontal line, not all at the same point. We define a move as choosing two fleas at some points A and B , with A to the left of B , and letting the flea from A jump over the flea from B to the point C so that $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine all values of λ such that, for any point M on the line and for any initial position of the n fleas, there exists a sequence of moves that will take them all to the position right of M .

(IMO Shortlist 2000)

Úloha 46. Starting with the triple $(1007\sqrt{2}, 2014\sqrt{2}, 1007\sqrt{14})$, define a sequence of triples (x_n, y_n, z_n) by

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \sqrt{x_n(y_n + z_n - x_n)}, \\y_{n+1} &= \sqrt{y_n(z_n + x_n - y_n)}, \\z_{n+1} &= \sqrt{z_n(x_n + y_n - z_n)}\end{aligned}$$

for $n \geq 0$. Show that each of the sequences $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ converges to a limit and find these limits. (Indie TST)

Úloha 47. A crazy physicist discovered a new kind of particle which he called an imon, after some of them mysteriously appeared in his lab. Some pairs of imons in the lab can be entangled, and each imon can participate in many entanglement relations. The physicist has found a way to perform the following two kinds of operations with these particles, one operation at a time.

- (i) If some imon is entangled with an odd number of other imons in the lab, then the physicist can destroy it.
- (ii) At any moment, he may double the whole family of imons in the lab by creating a copy I' of each imon I . During this procedure, the two copies I' and J' become entangled if and only if the original imons I and J are entangled, and each copy I' becomes entangled with its original imon I ; no other entanglements occur or disappear at this moment.

Prove that the physicist may apply a sequence of much operations resulting in a family of imons, no two of which are entangled. (IMO Shortlist 2013)

Úloha 48. Some positive integers are initially written on a board, where each 2 of them are different. Each time we can do the following moves:

- (i) If there are 2 numbers (written in the board) in the form $n, n + 1$ we can erase them and write down $n - 2$.
- (ii) If there are 2 numbers (written in the board) in the form $n, n + 4$ we can erase them and write down $n - 1$.

After some moves, there might appear negative numbers. Find the maximum value of the integer c such that: Independently of the starting numbers, each number which appears in any move is greater or equal to c . (Řecko TST)

Literatura a zdroje

Úlohy jsem čerpal hlavně z těchto příspěvků:

- [1] Vašek Voráček, *Invarianty a monovarianty*, iKS 2018
- [2] Martin Töpfer, *Invarianty*, Lipová-Lázně 2016
- [3] Anička Doležalová, *Obarvování a dláždění*, Sklené 2015
- [4] Viki Němeček, *Poloměňky*, Paseky 2018

Hinty

Hint 2. Liché a sudé pozice.

Hint 3. Co se notoricky zachovává při ciferném součtu?

Hint 4. Pokud je v množině (a, b) , o jakých dalších bodech umíme říci, že tam budou? Potom ověř, jestli se do nějakého takového bodu umíme dostat.

Hint 5. 31.

Hint 7. Nějak je rozdělit a pak přesouvat.

Hint 8. Rozdíly v jednotlivých místnostech.

Hint 9. Přímočaře, ale složitě: seřazení a lexikografické uspořádání. Chytře: co takhle nějaká konvexní funkce?

Hint 10. Zkus zlepšovat situaci pomocí obrácení pořadí v nějakém oblouku.

Hint 12. Barvy políček.

Hint 13. Šachovnicové obarvení.

Hint 14. Barvení mod 4.

Hint 15. Barvení.

Hint 16. Modulo 3.

Hint 18. Nejde to. Obarvi třemi barvami.

Hint 19. Šachovnicové obarvení.

Hint 20. Co se dá říci o chování jednotlivých lamp?

Hint 21. Co se nemění? Co se naopak zvětšuje?

Hint 22. Najdi výraz, který se v každém kroku zvýší.

Hint 24. Vymysli vážený součet šesti po sobě jdoucích členů tak, aby to byl invariant.

Hint 25. Vážený součet.

Hint 26. Součiny sousedních.

Hint 27. Obvod.

Hint 28. Délka vektoru.

Hint 29. Součet v celé tabulce.

Hint 30. Souřadnice mod 2.

Hint 31. Orientace.

Hint 32. Nějak to spoj a odstraňuj křížení.

Hint 33. Řekněme, že v každém kroku se příslušná kulička rozkrojí na dvě poloviční. Celkový objem se pak nemění.

Hint 34. Stejný invariant jako v předešlé úloze.

Hint 35. Popelka chce omezit součty v nesousedních kbelících.

Hint 36. Součet odmocnin i takových, že vypíná na i -té a $i + 1$ -ní pozici je v téže pozici.

Hint 37. Sporem.

Hint 38. Tři barvy.

Hint 39. Součet absolutních hodnot součtů všech podmnožin čísel ve vrcholech takových, že jsou tato čísla v pětiúhelníku vedle sebe.

Hint 41. Uhadnout řešení a indukci, na zbytek parita.

Hint 42. Na jednu část indukci, na druhou modulo.

Hint 43. Binárka a dělení se zbytkem.

Hint 44. V průběhu řešení se dá použít AG nerovnost.

Hint 46. x, y, z jsou strany trojúhelníka.

Hint 47. Je to graf a dá se využít jeho barevnost – nejmenší počet barev, kterými lze obarvit graf, aby 2 vrcholy spojené hranou měly různou barvu.