

Domácí kolo MO kat. A – úlohy 1, 3 a 4

Matěj Doležálek

13. listopad 2020

Ostatní kurzy: <https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/?page=courses>

Návodné a doplňující úlohy: <http://www.matematickaolympiada.cz/media/6511188/a70i-nn-.pdf>

Studijní texty: <http://mg.karlin.mff.cuni.cz/materialy/46.talenty-z.halas.pdf>

Matematický korespondenční seminář (PraSe): <https://prase.cz/commentary/aktualni.php>

Úloha 1. Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je

- (a) pět;
- (b) sedm.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.
- N2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.
- N3. Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.
- N4. Najděte všechna celá čísla x a y , pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.
- N5. Najděte všechna přirozená čísla x , y a z , pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.
- D1. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ šesti prvočísel.
- D2. Vyřešte soutěžní úlohu pro případ $n = 8$ prvočísel.
- D3. Najděte všechna prvočísla x , y , z splňující rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.
- D4. Najděte všechna prvočísla x , y , z splňující rovnici $xyz = xy + yz + zx + x + y + z + 35$.

UŽITEČNÉ POZNATKY:

- Vztah „ a dělí b “ značíme $a \mid b$.
- Nechť je p prvočíslo, a , b celá čísla. Potom pokud $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.
- Diofantické rovnice (hledám jen řešení s celými/přirozenými čísly) se hodí upravovat do tvaru se součinem.
- Hodí se i seřazení a odhady.

DALŠÍ ÚLOHY NA PROCVIČENÍ:

- Součet 2020 prvočísel dělí jejich součin. Určete nejmenší z těchto prvočísel.
- Přirozená a , b , c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Úloha 4. Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho *superdělitelem*.

- (i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.
- (ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2020.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Připomeňme, že prvočinitelem čísla n nazýváme každé prvočíslo, které číslo n dělí.

- N1. Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n .
- N2. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

- N3. Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.
- D1. Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.
- D2. Které z čísel $2, 3, \dots, 20$ je superdělitelem největšího počtu čísel?
- D3. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \dots, 45$?
- D4. Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \dots, 45$?

UŽITEČNÉ POZNATKY:

- Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad ($n > 1$).
- Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
- Druhý nejmenší dělitel n je prvočíslo.
- Pokud d je i -tý nejmenší dělitel n , pak $\frac{n}{d}$ je i -tý největší dělitel n .
- Nechť je n složené a p nejmenší prvočinitel n . Pak $\frac{n}{p} \geq \sqrt{n} \geq p$.

DALŠÍ ÚLOHY NA PROCVIČENÍ:

- Najděte všechna přirozená n s alespoň sedmi děliteli, která splňují $d_5 - d_3 = 50$ a zároveň $11d_5 + 8d_7 = 3n$, kde d_i je i -tý nejmenší dělitel n .

Úloha 3. Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b, b + c, c + a, ab, bc, ca, abc$?

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

Ve všech úlohách budou a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla.

- N1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b, b + c, c + a, a + b + c$.
- N2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc .
- N3. Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a + 1, b + 1, a, b, ab$. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?
- N4. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $ab, ac, a + b, a + c$.
- D1. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b, b + 2c, c + 2a$.
- D2. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b, b + c, c + a, ab + 1, bc + 1, ca + 1, abc$.
- D3. Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}, \quad \frac{a + b + c}{3}, \quad \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

UŽITEČNÉ POZNATKY:

- Hodí se uvažovat o uspořádání výrazů na číselné ose.
- Může pomoci symetrie.

DALŠÍ ÚLOHY NA PROCVIČENÍ:

- Je dáno n různých kladných čísel. Dokažte, že mezi součty všech podmnožin této n -tice nalezneme alespoň $\frac{n(n+1)}{2}$ různých čísel.