Úloha 1.

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je

(a) pět;

(b) sedm.

$$p_1 \cdots p_5 = 105 \cdot (p_1 + \cdots + p_5)$$
$$p_1 \cdots p_7 = 105 \cdot (p_1 + \cdots + p_7)$$

Vztah „a dělí b" značíme $a \mid b$.

Definice

Přirozené p nazýváme *prvočíslem*, pokud pro přirozená a, b splňující $p = ab$ nutně $a = 1$ nebo $b = 1$.

Lemma

Buďte p prvočíslo, a, b celá čísla. Potom pokud $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$\implies$ $3 \mid p$ nebo $3 \mid q$ nebo $3 \mid r$.

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$ (obdobně pro 5 a 7).

$\implies$ Prvočísla jsou (v nějakém pořadí) 3, 5, 7.

Zkrátíme na $1 = 3 + 5 + 7$.

$\longrightarrow$ Spor: žádná taková trojice prvočísel neexistuje.

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$pqrs = 105(p + q + r + s) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid pqrs$

$\implies$ některá tři z prvočísel jsou 3, 5, 7.

Zkrátíme na $s = 3 + 5 + 7 + s$.

$\longrightarrow$ Spor: žádná taková trojice prvočísel neexistuje.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$pqr = 7(p + q + r) \implies 7 \mid pqr$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$, upravíme:

$$pq - p - q + 1 = 8,$$
$$(p - 1)(q - 1) = 8.$$

Možné rozklady $(p - 1)(q - 1) = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2$. Jenže $8 + 1 = 9$ není prvočíslo.

Jediným řešením je trojice $\{p, q, r\} = \{3, 5, 7\}$ (libovolné pořadí).

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$\begin{aligned} 3xy - 5x - 7y &= 1, \\ 9xy - 15x - 21y &= 3, \\ 9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\ (3x - 7)(3y - 5) &= 38. \end{aligned}$$

Možné rozklady
$(3x - 7)(3y - 5) = 38 \cdot 1 = (-19) \cdot (-2) = 2 \cdot 19 = (-1) \cdot (-38)$
(ostatní dávají špatné zbytky po dělení 3). x a y zde nejsou zaměnitelné!

Můžeme brát jenom rozklady, kde mají činitelé správné zbytky po dělení 3. Řešení: $(x, y) \in \{(15, 2), (-4, 1), (3, 8), (2, -11)\}$.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost. BÚNO nechť $x \geq y \geq z \geq 1$.

Potom:

$$xyz = x + y + z + 2 \leq 3x + 2,$$
$$yz \leq 3 + \frac{2}{x}.$$

Takže určitě $yz \leq 5$. Stačí projít možné hodnoty y, z a pro každý případ řešit rovnici v jedné proměnné.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$.
Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$. Zbude rovnice $2x = x + 5$, což má řešení $x = 5$.

(iii) $y = 1$, pak nutně $z = 1$. Zbude $x = x + 4$, což nemá řešení.

Všechna řešení: $(x, y, z) \in \{(2, 2, 2), (3, 3, 1), (5, 2, 1)\}$ a všechny permutace.

Úloha

Přirozená a, b, c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Pro spor nechť $a \geq b \geq c \geq 3$. Potom:

$$3a + 15 \geq a + b + c + 15 = abc \geq 9a,$$
$$15 \geq 6a \geq 18.$$

Spor.

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.

Úprava na čtverce:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z &= 18, \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 &= 72 + 3, \\ (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 &= 75. \end{aligned}$$

$(2x-1)^2 \leq 75 \implies 2x - 1 \leq 8 \implies x \leq 4$

$\implies x, y, z \in \{2, 3\}$

Jediné řešení: $x = y = z = 3$.

Úloha 4.

Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho *superdělitelem*.

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2020.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení

n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

- $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies$ dělitelé 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- $n = 64 = 2^6 \implies$ dělitelé 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
- $n = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \implies 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dělitelů.
- $n = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 \implies 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ dělitelů.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

d_2 je prvočíslo.

Kdyby nebylo, tak $d_2 = ab$ pro $1 < a, b < d_2$. Pak jsou ale a i b další dělitelé n, ostře mezi d_1 a d_2 $\longrightarrow$ spor.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

$d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$ pro $1 \leq i \leq k$.

Uvažme $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \cdots > \frac{n}{d_k}$. Opět jsou to dělitelé n, přitom je jich k navzájem různých. Tudíž:

$$\begin{array}{ccccc} d_1 & < & \cdots & < & d_k \\ = & & & & = \\ \frac{n}{d_k} & < & \cdots & < & \frac{n}{d_1}. \end{array}$$

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Z definice je superdělitel d_{k-1}. Ale

$$d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$$

a d_2 je prvočíslo. Je to tak i nejmenší prvočinitel n.

Lemma

Je-li n prvočíslo, pak je superdělitelem n číslo 1. Je-li n složené, pak je superdělitel $\frac{n}{p} \geq p$.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Řešme $\frac{n}{p} = 2$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 2p$, takže $2 \mid n$.

Ale p nemůže být větší než 2, takže $p = 2$. To dává $n = 4$ jako jediné řešení.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Řešme $\frac{n}{p} = 7$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 7p$, takže $7 \mid n$.

Z toho p nemůže být větší než 7, takže řešení jsou pro $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. To dává $n \in \{14, 21, 35, 49\}$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p+1$.

(ii) Kdyby $101 \mid p+1$, pak už $m \leq 20$, ale $m \geq p$. Takže $101 \mid m$.

(iii) Pokud $5 \mid m$, tak už $m = 505$, $p = 4 - 1 = 3$ je prvočíslo, takže $n = 1515$. Pokud $5 \mid p+1$, pak už $p = 20 - 1 = 19$ je prvočíslo a $m = 101$, takže $n = 1919$.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Naproti tomu složená čísla n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{1, \ldots, 45\}$ už mají $p \leq m \leq 45$. Ale p je prvočíslo, tedy už $p \leq 43$, takže

$$n = mp \leq 45 \cdot 43 = 1935.$$

Takže nejblíže k 2020 je 2017 se superdělitelem 1.

Poznámka: platí $45^2 = 2025$ a $2021 = 43 \cdot 47$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Volba $n = 43^2 = 1849$ vskutku dá superdělitele 43. Aby $n = mp$ bylo vyšší, nutně $m \in \{44, 45\}$. To ale znamená $2 \mid m$ nebo $3 \mid m$, takže $p \leq 3$. Z toho už je $n = mp \leq 45 \cdot 3 = 135$ mnohem menší než 1849.

Úloha 3.

Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?

Úloha N1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $S = a+b+c$. Potom

$$\begin{array}{ccccccc} b+c & & c+a & & a+b & & a+b+c \\ = & & = & & = & & = \\ S-a & < & S-b & < & S-c & < & S. \end{array}$$

Všechna čtyři čísla jsou tak navzájem různá.

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $P = abc$. Potom

$$\begin{array}{ccccc} bc & & ca & & ab \\ = & & = & & = \\ \frac{P}{a} & < & \frac{P}{b} & < & \frac{P}{c}. \end{array}$$

Číslo abc je rovno některému dalšímu, právě když $1 \in \{a, b, c\}$. Takže nejmenší možný počet různých čísel je 3.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b+1$. Potom $a > 1$, takže nejde $ab = b$. Pro $ab = b$ lze $b = 1$. Jinak musí platit

$$b+2 = a+1 = ab = b(b+1) = b^2 + b,$$

tedy $b = \sqrt{2}$, $a = 1 + \sqrt{2}$.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$. Pro $a=1$ toto nemá řešení, pro $a \neq 1$ už $b = \frac{a}{a-1} = c$, spor. Takže alespoň tři různá. Toho lze docílit např. $(a, b, c) = (2, 10, 6)$.

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Zde $a > b > c$ není BÚNO – prohození dvou proměnných mění hodnoty výrazů.

Výrazy rovny, právě když:

$$\begin{aligned} a + 2b &= b + 2c, \\ a + b &= 2c, \\ c &= \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Dvou různých tedy lze dosáhnout, když je např. c průměr z a, b (a, b různá $\implies$ pak $a < \frac{a+b}{2} < b$).

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Pro spor nechť jsou všechny tři výrazy navzájem rovny. To znamená, že každé číslo je průměrem zbylých dvou. Potom ale pro $S = a + b + c$ platí:

$$\begin{aligned} c &= \frac{a+b}{2} = \frac{S}{2} - \frac{c}{2}, \\ \frac{3}{2}c &= \frac{S}{2}, \\ c &= \frac{S}{3} = a = b. \end{aligned}$$

Spor $\implies$ vždy alespoň dvě různá.

Úloha D3. (KAGH nerovnost)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Dokážeme postupně.

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\
a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

Pro čtyři proměnné:

$$
\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq
$$

$$
\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.
$$

Pro tři proměnné, nechť $m = \frac{a+b+c}{3}$:

$$
m = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm},
$$

$$
m \geq \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{\frac{m^4}{m}} = \sqrt[3]{\frac{abcm}{m}} = \sqrt[3]{abc}.
$$

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$
$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3},\\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 =\\ &= (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca),\\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.\end{aligned}$$

To je ale jen součet AG pro (a^2, b^2), (b^2, c^2), (c^2, a^2).