Úloha 1.

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je

(a) pět;

(b) sedm.

Úloha 1.

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je

(a) pět;

(b) sedm.

$$p_1 \cdots p_5 = 105 \cdot (p_1 + \cdots + p_5)$$
$$p_1 \cdots p_7 = 105 \cdot (p_1 + \cdots + p_7)$$

Vztah „a dělí b“ značíme $a \mid b$.

Vztah „a dělí b“ značíme $a \mid b$.

Definice

Přirozené p nazýváme *prvočíslem*, pokud pro přirozená a, b splňující $p = ab$ nutně $a = 1$ nebo $b = 1$.

Vztah „a dělí b“ značíme $a \mid b$.

Definice

Přirozené p nazýváme *prvočíslem*, pokud pro přirozená a, b splňující $p = ab$ nutně $a = 1$ nebo $b = 1$.

Lemma

Buďte p prvočíslo, a, b celá čísla. Potom pokud $p \mid ab$, pak $p \mid a$ nebo $p \mid b$.

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p + q + r)$$

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$$\implies 3 \mid p \text{ nebo } 3 \mid q \text{ nebo } 3 \mid r.$$

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$$\implies 3 \mid p \text{ nebo } 3 \mid q \text{ nebo } 3 \mid r.$$

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$$\implies 3 \mid p \text{ nebo } 3 \mid q \text{ nebo } 3 \mid r.$$

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$ (obdobně pro 5 a 7).

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$$\implies 3 \mid p \text{ nebo } 3 \mid q \text{ nebo } 3 \mid r.$$

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$ (obdobně pro 5 a 7).

$\implies$ Prvočísla jsou (v nějakém pořadí) 3, 5, 7.

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$$\implies 3 \mid p \text{ nebo } 3 \mid q \text{ nebo } 3 \mid r.$$

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$ (obdobně pro 5 a 7).

$\implies$ Prvočísla jsou (v nějakém pořadí) 3, 5, 7.

Zkrátíme na $1 = 3 + 5 + 7$.

Úloha N1.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ tří prvočísel.

$$pqr = 105(p+q+r) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \mid 105(p+q+r) = pqr$$

$\implies$ $3 \mid p$ nebo $3 \mid q$ nebo $3 \mid r$.

Ale p, q, r jsou prvočísla, takže $3 \mid p$ znamená $3 = p$ (obdobně pro 5 a 7).

$\implies$ Prvočísla jsou (v nějakém pořadí) 3, 5, 7.

Zkrátíme na $1 = 3 + 5 + 7$.

$\longrightarrow$ Spor: žádná taková trojice prvočísel neexistuje.

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$$pqrs = 105(p + q + r + s)$$

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$$pqrs = 105(p+q+r+s) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid pqrs$$

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$$pqrs = 105(p+q+r+s) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid pqrs$$

$\implies$ některá tři z prvočísel jsou 3, 5, 7.

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$$pqrs = 105(p+q+r+s) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid pqrs$$

$\implies$ některá tři z prvočísel jsou 3, 5, 7.

Zkrátíme na $s = 3 + 5 + 7 + s$.

Úloha N2.

Vyřešte soutěžní úlohu pro případ čtyř prvočísel.

$pqrs = 105(p + q + r + s) \implies 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid pqrs$

$\implies$ některá tři z prvočísel jsou 3, 5, 7.

Zkrátíme na $s = 3 + 5 + 7 + s$.

$\longrightarrow$ Spor: žádná taková trojice prvočísel neexistuje.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$$pqr = 7(p + q + r)$$

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$$pqr = 7(p+q+r) \implies 7 \mid pqr$$

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$$pqr = 7(p + q + r) \implies 7 \mid pqr$$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$$pqr = 7(p+q+r) \implies 7 \mid pqr$$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$pqr = 7(p+q+r) \implies 7 \mid pqr$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$, upravíme:

$$\begin{aligned} pq - p - q + 1 &= 8, \\ (p-1)(q-1) &= 8. \end{aligned}$$

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$pqr = 7(p+q+r) \implies 7 \mid pqr$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$, upravíme:

$$pq - p - q + 1 = 8,$$
$$(p-1)(q-1) = 8.$$

Možné rozklady $(p-1)(q-1) = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2$.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$pqr = 7(p + q + r) \implies 7 \mid pqr$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$, upravíme:

$$pq - p - q + 1 = 8,$$
$$(p - 1)(q - 1) = 8.$$

Možné rozklady $(p - 1)(q - 1) = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2$. Jenže $8 + 1 = 9$ není prvočíslo.

Úloha N3.

Najděte všechny trojice prvočísel takové, že jejich součin je sedminásobkem jejich součtu.

$pqr = 7(p+q+r) \implies 7 \mid pqr$

$\implies$ jedno z prvočísel je 7, BÚNO $r = 7$.

Zkrátíme na $pq = p + q + 7$, upravíme:

$$\begin{aligned} pq - p - q + 1 &= 8, \\ (p-1)(q-1) &= 8. \end{aligned}$$

Možné rozklady $(p-1)(q-1) = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2$. Jenže $8 + 1 = 9$ není prvočíslo.

Jediným řešením je trojice $\{p, q, r\} = \{3, 5, 7\}$ (libovolné pořadí).

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin.

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$
\begin{aligned}
3xy - 5x - 7y &= 1, \\
9xy - 15x - 21y &= 3, \\
9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\
(3x - 7)(3y - 5) &= 38.
\end{aligned}
$$

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$\begin{aligned} 3xy - 5x - 7y &= 1, \\ 9xy - 15x - 21y &= 3, \\ 9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\ (3x - 7)(3y - 5) &= 38. \end{aligned}$$

Možné rozklady
$(3x - 7)(3y - 5) = 38 \cdot 1 = (-19) \cdot (-2) = 2 \cdot 19 = (-1) \cdot (-38)$
(ostatní dávají špatné zbytky po dělení 3).

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$\begin{aligned} 3xy - 5x - 7y &= 1, \\ 9xy - 15x - 21y &= 3, \\ 9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\ (3x - 7)(3y - 5) &= 38. \end{aligned}$$

Možné rozklady
$(3x - 7)(3y - 5) = 38 \cdot 1 = (-19) \cdot (-2) = 2 \cdot 19 = (-1) \cdot (-38)$
(ostatní dávají špatné zbytky po dělení 3). x a y zde nejsou zaměnitelné!

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$\begin{aligned} 3xy - 5x - 7y &= 1, \\ 9xy - 15x - 21y &= 3, \\ 9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\ (3x - 7)(3y - 5) &= 38. \end{aligned}$$

Možné rozklady
$(3x - 7)(3y - 5) = 38 \cdot 1 = (-19) \cdot (-2) = 2 \cdot 19 = (-1) \cdot (-38)$
(ostatní dávají špatné zbytky po dělení 3). x a y zde nejsou zaměnitelné!

Můžeme brát jenom rozklady, kde mají činitelé správné zbytky po dělení 3.

Úloha N4.

Najděte všechna celá čísla x a y, pro která $3xy = 5x + 7y + 1$.

Na první pohled není vidět, jak získat rozklad na součin. Ale jde to:

$$\begin{aligned} 3xy - 5x - 7y &= 1, \\ 9xy - 15x - 21y &= 3, \\ 9xy - 15x - 21y + 35 &= 35 + 3, \\ (3x-7)(3y-5) &= 38. \end{aligned}$$

Možné rozklady
$(3x-7)(3y-5) = 38 \cdot 1 = (-19) \cdot (-2) = 2 \cdot 19 = (-1) \cdot (-38)$
(ostatní dávají špatné zbytky po dělení 3). x a y zde nejsou zaměnitelné!

Můžeme brát jenom rozklady, kde mají činitelé správné zbytky po dělení 3. Řešení: $(x, y) \in \{(15, 2), (-4, 1), (3, 8), (2, -11)\}$.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost. BÚNO nechť $x \geq y \geq z \geq 1$.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost. BÚNO nechť $x \geq y \geq z \geq 1$.

Potom:

$$xyz = x + y + z + 2 \leq 3x + 2,$$
$$yz \leq 3 + \frac{2}{x}.$$

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost. BÚNO nechť $x \geq y \geq z \geq 1$.

Potom:

$$xyz = x + y + z + 2 \leq 3x + 2,$$
$$yz \leq 3 + \frac{2}{x}.$$

Takže určitě $yz \leq 5$.

Úloha N5.

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Součin tvaru $(x - c_1)(y - c_2)(z - c_3)$ by vyrobil členy jako xy $\longrightarrow$ potřebujeme něco jiného.

x, y, z jsou zaměnitelné, tak je seřadíme a odhadneme jejich velikost. BÚNO nechť $x \geq y \geq z \geq 1$.

Potom:

$$\begin{aligned} xyz &= x + y + z + 2 \leq 3x + 2, \\ yz &\leq 3 + \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Takže určitě $yz \leq 5$. Stačí projít možné hodnoty y, z a pro každý případ řešit rovnici v jedné proměnné.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí
$xyz = x + y + z + 2$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$.
Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$. Zbude rovnice $2x = x + 5$, což má řešení $x = 5$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$. Zbude rovnice $2x = x + 5$, což má řešení $x = 5$.

(iii) $y = 1$, pak nutně $z = 1$.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$. Zbude rovnice $2x = x + 5$, což má řešení $x = 5$.

(iii) $y = 1$, pak nutně $z = 1$. Zbude $x = x + 4$, což nemá řešení.

Úloha N5. (pokračování)

Najděte všechna přirozená čísla x, y a z, pro která platí $xyz = x + y + z + 2$.

Speciální případy:

(i) $x = 1$. Pak už i $y = z = 1$, což není řešení.

(ii) $x = 2$. Pak i $y, z \in \{1, 2\}$. Z toho $y = z = 2$ je řešení, $y = 2$ a $z = 1$ není a $y = z = 1$ taky ne.

Nadále už $x > 2$. Potom $yz \leq 3 + \frac{2}{x} < 3 + \frac{2}{2} \leq 4$, takže $yz \leq 3$. Opět dořešíme možnosti:

(i) $y = 3$, pak už nutně $z = 1$. Zbude rovnice $3x = x + 6$, což má řešení $x = 3$.

(ii) $y = 2$, pak nutně $z = 1$. Zbude rovnice $2x = x + 5$, což má řešení $x = 5$.

(iii) $y = 1$, pak nutně $z = 1$. Zbude $x = x + 4$, což nemá řešení.

Všechna řešení: $(x, y, z) \in \{(2, 2, 2), (3, 3, 1), (5, 2, 1)\}$ a všechny permutace.

Úloha

Přirozená a, b, c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Úloha

Přirozená a, b, c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Pro spor nechť $a \geq b \geq c \geq 3$.

Úloha

Přirozená a, b, c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Pro spor nechť $a \geq b \geq c \geq 3$. Potom:

$$3a + 15 \geq a + b + c + 15 = abc \geq 9a,$$
$$15 \geq 6a \geq 18.$$

Úloha

Přirozená a, b, c splňují $abc = a + b + c + 15$. Dokažte, že jedno z nich je menší nebo rovno 2.

Pro spor nechť $a \geq b \geq c \geq 3$. Potom:

$$3a + 15 \geq a + b + c + 15 = abc \geq 9a,$$
$$15 \geq 6a \geq 18.$$

Spor.

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.

Úprava na čtverce:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z &= 18, \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 &= 72 + 3, \\ (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 &= 75. \end{aligned}$$

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18$.

Úprava na čtverce:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z &= 18, \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 &= 72 + 3, \\ (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 &= 75. \end{aligned}$$

$(2x-1)^2 \leq 75 \implies 2x - 1 \leq 8 \implies x \leq 4$

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18.$

Úprava na čtverce:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z &= 18, \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 &= 72 + 3, \\ (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2z - 1)^2 &= 75. \end{aligned}$$

$(2x - 1)^2 \leq 75 \implies 2x - 1 \leq 8 \implies x \leq 4$

$\implies x, y, z \in \{2, 3\}$

Úloha D3.

Najděte všechna prvočísla x, y, z splňující rovnici
$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 18.$

Úprava na čtverce:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z &= 18, \\ 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4z^2 - 4z + 1 &= 72 + 3, \\ (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 &= 75. \end{aligned}$$

$(2x-1)^2 \leq 75 \implies 2x - 1 \leq 8 \implies x \leq 4$

$\implies x, y, z \in \{2, 3\}$

Jediné řešení: $x = y = z = 3$.

Úloha 4.

Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho *superdělitelem*.

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2020.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení

n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení
Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení
n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení

n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

- $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies$ dělitelé 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení

n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

- $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies$ dělitelé 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- $n = 64 = 2^6 \implies$ dělitelé 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení
Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \le \beta_i \le \alpha_i$.

Tvrzení
n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

- $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies$ dělitelé 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- $n = 64 = 2^6 \implies$ dělitelé 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
- $n = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \implies 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dělitelů.

Nechť je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ prvočíselný rozklad.

Tvrzení

Dělitelé n jsou právě tvaru $d = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ pro $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Tvrzení

n má celkem $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ dělitelů.

Příklady:

- $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \implies$ dělitelé 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
- $n = 64 = 2^6 \implies$ dělitelé 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.
- $n = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \implies 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dělitelů.
- $n = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 \implies 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ dělitelů.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

d_2 je prvočíslo.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

d_2 je prvočíslo.

Kdyby nebylo, tak $d_2 = ab$ pro $1 < a, b < d_2$.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

d_2 je prvočíslo.

Kdyby nebylo, tak $d_2 = ab$ pro $1 < a, b < d_2$. Pak jsou ale a i b další dělitelé n, ostře mezi d_1 a d_2

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

d_2 je prvočíslo.

Kdyby nebylo, tak $d_2 = ab$ pro $1 < a, b < d_2$. Pak jsou ale a i b další dělitelé n, ostře mezi d_1 a d_2 $\longrightarrow$ spor.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

$d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$ pro $1 \leq i \leq k$.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

$$d_{k+1-i} = \frac{n}{d_i} \text{ pro } 1 \le i \le k.$$

Uvažme $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \cdots > \frac{n}{d_k}$.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

$d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$ pro $1 \leq i \leq k$.

Uvažme $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \cdots > \frac{n}{d_k}$. Opět jsou to dělitelé n, přitom je jich k navzájem různých.

Nechť jsou

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

všichni dělitelé n seřazení vzestupně.

Tvrzení

$d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$ pro $1 \leq i \leq k$.

Uvažme $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \cdots > \frac{n}{d_k}$. Opět jsou to dělitelé n, přitom je jich k navzájem různých. Tudíž:

$$\begin{array}{ccccc} d_1 & < & \cdots & < & d_k \\ = & & & & = \\ \frac{n}{d_k} & < & \cdots & < & \frac{n}{d_1}. \end{array}$$

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Z definice je superdělitel d_{k-1}.

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Z definice je superdělitel d_{k-1}. Ale

$$d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$$

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Z definice je superdělitel d_{k-1}. Ale

$$d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$$

a d_2 je prvočíslo.

Úloha N1.

Uvědomte si, že superdělitelem daného čísla $n > 1$ je číslo $\frac{n}{p}$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla n.

Z definice je superdělitel d_{k-1}. Ale

$$d_{k-1} = \frac{n}{d_2}$$

a d_2 je prvočíslo. Je to tak i nejmenší prvočinitel n.

Lemma

Je-li n prvočíslo, pak je superdělitelem n číslo 1.

Lemma

Je-li n prvočíslo, pak je superdělitelem n číslo 1. Je-li n složené, pak je superdělitel $\frac{n}{p} \geq p$.

Lemma

Je-li n prvočíslo, pak je superdělitelem n číslo 1. Je-li n složené, pak je superdělitel $\frac{n}{p} \geq p$.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Řešme $\frac{n}{p} = 2$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Řešme $\frac{n}{p} = 2$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 2p$, takže $2 \mid n$.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Řešme $\frac{n}{p} = 2$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 2p$, takže $2 \mid n$.

Ale p nemůže být větší než 2, takže $p = 2$.

Úloha N2.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 2.

Řešme $\frac{n}{p} = 2$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 2p$, takže $2 \mid n$.

Ale p nemůže být větší než 2, takže $p = 2$. To dává $n = 4$ jako jediné řešení.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Řešme $\frac{n}{p} = 7$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Řešme $\frac{n}{p} = 7$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 7p$, takže $7 \mid n$.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Řešme $\frac{n}{p} = 7$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 7p$, takže $7 \mid n$.

Z toho p nemůže být větší než 7, takže řešení jsou pro $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Úloha N3.

Určete všechna přirozená čísla, jejichž superdělitelem je číslo 7.

Řešme $\frac{n}{p} = 7$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pak $n = 7p$, takže $7 \mid n$.

Z toho p nemůže být větší než 7, takže řešení jsou pro $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. To dává $n \in \{14, 21, 35, 49\}$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p + 1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p + 1$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p+1$.

(ii) Kdyby $101 \mid p+1$, pak už $m \leq 20$, ale $m \geq p$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p+1$.

(ii) Kdyby $101 \mid p+1$, pak už $m \leq 20$, ale $m \geq p$. Takže $101 \mid m$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p+1$.

(ii) Kdyby $101 \mid p+1$, pak už $m \leq 20$, ale $m \geq p$. Takže $101 \mid m$.

(iii) Pokud $5 \mid m$, tak už $m = 505$, $p = 4 - 1 = 3$ je prvočíslo, takže $n = 1515$.

Úloha D1.

Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že když k nim přičteme jejich superdělitele, dostaneme součet 2020.

Řešme $n + \frac{n}{p} = 2020$, kde p má být nejmenší prvočinitel n.

Pojmenujme $m = \frac{n}{p}$, potom má m pouze prvočinitele $\geq p$.

Pak $m(p+1) = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Nelze $m = 1$, protože 2019 není prvočíslo $\implies$ dále už $m \geq p$. Rozdělíme činitele mezi m a $p+1$:

(i) Kdyby $2 \mid m$, pak už $p = 2$, ale $3 \nmid 2020$. Tedy $4 \mid p+1$.

(ii) Kdyby $101 \mid p+1$, pak už $m \leq 20$, ale $m \geq p$. Takže $101 \mid m$.

(iii) Pokud $5 \mid m$, tak už $m = 505$, $p = 4 - 1 = 3$ je prvočíslo, takže $n = 1515$. Pokud $5 \mid p+1$, pak už $p = 20 - 1 = 19$ je prvočíslo a $m = 101$, takže $n = 1919$.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Naproti tomu složená čísla n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{1, \ldots, 45\}$ už mají $p \leq m \leq 45$.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Naproti tomu složená čísla n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{1, \ldots, 45\}$ už mají $p \leq m \leq 45$. Ale p je prvočíslo, tedy už $p \leq 43$, takže

$$n = mp \leq 45 \cdot 43 = 1935.$$

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Naproti tomu složená čísla n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{1, \ldots, 45\}$ už mají $p \leq m \leq 45$. Ale p je prvočíslo, tedy už $p \leq 43$, takže

$$n = mp \leq 45 \cdot 43 = 1935.$$

Takže nejblíže k 2020 je 2017 se superdělitelem 1.

Úloha D3.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 45$?

Chyták: 1 je superdělitelem všech prvočísel. Nejbližší prvočísla k 2020 jsou 2017 a 2020.

Naproti tomu složená čísla n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{1, \ldots, 45\}$ už mají $p \leq m \leq 45$. Ale p je prvočíslo, tedy už $p \leq 43$, takže

$$n = mp \leq 45 \cdot 43 = 1935.$$

Takže nejblíže k 2020 je 2017 se superdělitelem 1.

Poznámka: platí $45^2 = 2025$ a $2021 = 43 \cdot 47$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Volba $n = 43^2 = 1849$ vskutku dá superdělitele 43.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Volba $n = 43^2 = 1849$ vskutku dá superdělitele 43. Aby $n = mp$ bylo vyšší, nutně $m \in \{44, 45\}$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Volba $n = 43^2 = 1849$ vskutku dá superdělitele 43. Aby $n = mp$ bylo vyšší, nutně $m \in \{44, 45\}$. To ale znamená $2 \mid m$ nebo $3 \mid m$, takže $p \leq 3$.

Úloha D4.

Které přirozené číslo nejbližší k číslu 2020 má svého superdělitele mezi čísly $2, 3, \ldots, 45$?

Superdělitel $> 1 \implies$ jen složená čísla. Z předchozí úlohy víme, že čísla se superdělitelem mezi $2, \ldots, 45$ najdeme jen mezi čísly $\leq 1935 < 2020$, takže stačí hledat největší takové.

Uvažujme číslo n se superdělitelem $\frac{n}{p} = m \in \{2, \ldots, 45\}$. Určitě $p \leq m \leq 45$, tedy $p \leq 43$.

Volba $n = 43^2 = 1849$ vskutku dá superdělitele 43. Aby $n = mp$ bylo vyšší, nutně $m \in \{44, 45\}$. To ale znamená $2 \mid m$ nebo $3 \mid m$, takže $p \leq 3$. Z toho už je $n = mp \leq 45 \cdot 3 = 135$ mnohem menší než 1849.

Úloha 3.

Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, ab, bc, ca, abc?

Úloha N1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b$, $b + c$, $c + a$, $a + b + c$.

Úloha N1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $S = a+b+c$.

Úloha N1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $S = a+b+c$. Potom

$$\begin{array}{ccccccc} b+c & & c+a & & a+b & & a+b+c \\ = & & = & & = & & = \\ S-a & < & S-b & < & S-c & < & S. \end{array}$$

Úloha N1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $S = a+b+c$. Potom

$$\begin{array}{ccccccc} b+c & & c+a & & a+b & & a+b+c \\ = & & = & & = & & = \\ S-a & < & S-b & < & S-c & < & S. \end{array}$$

Všechna čtyři čísla jsou tak navzájem různá.

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $P = abc$.

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $P = abc$. Potom

$$\begin{array}{ccccc} bc & & ca & & ab \\ = & & = & & = \\ \dfrac{P}{a} & < & \dfrac{P}{b} & < & \dfrac{P}{c}. \end{array}$$

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $P = abc$. Potom

$$\begin{array}{ccccc} bc & & ca & & ab \\ = & & = & & = \\ \dfrac{P}{a} & < & \dfrac{P}{b} & < & \dfrac{P}{c}. \end{array}$$

Číslo abc je rovno některému dalšímu, právě když $1 \in \{a, b, c\}$.

Úloha N2.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, bc, ca, abc.

BÚNO $a > b > c > 0$, dále $P = abc$. Potom

$$\begin{array}{ccccc} bc & & ca & & ab \\ = & & = & & = \\ \frac{P}{a} & < & \frac{P}{b} & < & \frac{P}{c}. \end{array}$$

Číslo abc je rovno některému dalšímu, právě když $1 \in \{a, b, c\}$. Takže nejmenší možný počet různých čísel je 3.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b + 1$.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b+1$. Potom $a > 1$, takže nejde $ab = b$.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b+1$. Potom $a > 1$, takže nejde $ab = b$. Pro $ab = b$ lze $b = 1$.

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b + 1$. Potom $a > 1$, takže nejde $ab = b$. Pro $ab = b$ lze $b = 1$. Jinak musí platit

$$b + 2 = a + 1 = ab = b(b + 1) = b^2 + b$$

Úloha N3.

Určete nejmenší počet různých čísel mezi čísly $a+1$, $b+1$, a, b, ab. Je tento počet možný v případě, kdy navíc jsou čísla a a b různá od 1?

BÚNO $a > b > 0$. Potom

$$\begin{array}{ccc} a+1 & > & b+1 \\ > & & > \\ a & > & b. \end{array}$$

Alespoň 3 různá čísla. Právě 3 lze dosáhnout: položíme $a = b+1$. Potom $a > 1$, takže nejde $ab = b$. Pro $ab = b$ lze $b = 1$. Jinak musí platit

$$b+2 = a+1 = ab = b(b+1) = b^2 + b,$$

tedy $b = \sqrt{2}$, $a = 1+\sqrt{2}$.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a + b$, $a + c$.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c).

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$
\begin{array}{ccc}
a+b & > & a+c \\
? & & ? \\
ab & > & ac.
\end{array}
$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$. Pro $a = 1$ toto nemá řešení

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$. Pro $a = 1$ toto nemá řešení, pro $a \neq 1$ už $b = \frac{a}{a-1} = c$, spor.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$. Pro $a=1$ toto nemá řešení, pro $a \neq 1$ už $b = \frac{a}{a-1} = c$, spor. Takže alespoň tři různá.

Úloha N4.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly ab, ac, $a+b$, $a+c$.

BÚNO $b > c > 0$ (v úloze vstupuje a odlišně od b, c). Potom

$$\begin{array}{ccc} a+b & > & a+c \\ ? & & ? \\ ab & > & ac. \end{array}$$

Kdyby byla jen dvě různá, pak $ab = a+b$, $ac = a+c$. Pro $a = 1$ toto nemá řešení, pro $a \neq 1$ už $b = \frac{a}{a-1} = c$, spor. Takže alespoň tři různá. Toho lze docílit např. $(a, b, c) = (2, 10, 6)$.

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$.

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$.

Zde $a>b>c$ není BÚNO – prohození dvou proměnných mění hodnoty výrazů.

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Zde $a > b > c$ není BÚNO – prohození dvou proměnných mění hodnoty výrazů.

Výrazy rovny, právě když:

$$\begin{aligned} a + 2b &= b + 2c, \\ a + b &= 2c, \\ c &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Zde $a > b > c$ není BÚNO – prohození dvou proměnných mění hodnoty výrazů.

Výrazy rovny, právě když:

$$\begin{aligned} a + 2b &= b + 2c, \\ a + b &= 2c, \\ c &= \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Dvou různých tedy lze dosáhnout, když je např. c průměr z a, b

Úloha D1.

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Zde $a > b > c$ není BÚNO – prohození dvou proměnných mění hodnoty výrazů.

Výrazy rovny, právě když:

$$
\begin{aligned}
a + 2b &= b + 2c,\\
a + b &= 2c,\\
c &= \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}
$$

Dvou různých tedy lze dosáhnout, když je např. c průměr z a, b (a, b různá $\implies$ pak $a < \frac{a+b}{2} < b$).

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Pro spor nechť jsou všechny tři výrazy navzájem rovny.

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Pro spor nechť jsou všechny tři výrazy navzájem rovny. To znamená, že každé číslo je průměrem zbylých dvou.

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + 2b$, $b + 2c$, $c + 2a$.

Pro spor nechť jsou všechny tři výrazy navzájem rovny. To znamená, že každé číslo je průměrem zbylých dvou. Potom ale pro $S = a + b + c$ platí:

$$\begin{aligned} c &= \frac{a+b}{2} = \frac{S}{2} - \frac{c}{2}, \\ \frac{3}{2}c &= \frac{S}{2}, \\ c &= \frac{S}{3} = a = b. \end{aligned}$$

Úloha D1. (pokračování)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a+2b$, $b+2c$, $c+2a$.

Pro spor nechť jsou všechny tři výrazy navzájem rovny. To znamená, že každé číslo je průměrem zbylých dvou. Potom ale pro $S = a+b+c$ platí:

$$\begin{aligned} c &= \frac{a+b}{2} = \frac{S}{2} - \frac{c}{2}, \\ \frac{3}{2}c &= \frac{S}{2}, \\ c &= \frac{S}{3} = a = b. \end{aligned}$$

Spor $\implies$ vždy alespoň dvě různá.

Úloha D3. (KAGH nerovnost)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Úloha D3. (KAGH nerovnost)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Úloha D3. (KAGH nerovnost)

Určete nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Dokážeme postupně.

AG nerovnost.

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\
a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\ a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Pro čtyři proměnné:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\ a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Pro čtyři proměnné:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Pro tři proměnné, nechť $m = \frac{a+b+c}{3}$:

$$m = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm},$$
$$m \geq \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{\frac{m^4}{m}} = \sqrt[3]{\frac{abcm}{m}} = \sqrt[3]{abc}.$$

GH nerovnost.

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost.

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},\\ \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} &\leq \sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3},\\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 =\\ &= (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca),\\ a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.\end{aligned}$$

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3}, \\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 = \\
&= (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca), \\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

To je ale jen součet AG pro (a^2, b^2), (b^2, c^2), (c^2, a^2).