Úvod do komutativní algebry: domácí úkol 3

web cvičení: `gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23`

Termín odevzdání: 4. ledna 17:20

1. (8 bodů) Buď V rozkladové nadtěleso polynomu $f(x) = x^4 - 2$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda je $V \supset \mathbb{Q}$ Galoisovo rozšíření, a určete $\mathrm{Gal}(V/\mathbb{Q})$. Nalezněte všechna tělesa T taková, že $V \supset T \supset \mathbb{Q}$, $[V : T] = 2$ a zároveň je $T \supset \mathbb{Q}$ normální rozšíření.

2. (5 bodů) Buď P prvoideál v okruhu R a I, J vlastní ideály v R. Dokažte:

a) $\sqrt{I} \subseteq P$, právě když $I \subseteq P$.

b) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

3. (5 bodů) Buď K těleso a $V \subset K^n$ neprázdná algebraická množina. Dokažte, že V je ireducibilní, právě když je $I(V)$ prvoideál.

4. (7 bodů) Buďte $R \subset S \subset T$ obory. Dokažte:

a) Je-li T konečně generovaný S-modul a S konečně generovaný R-modul, pak je také T konečně generovaný R-modul.

b) Nechť $\alpha, \beta \in S$. Je-li α celistvý prvek nad R a β celistvý prvek nad $R[\alpha]$, pak je také β celistvý prvek nad R.

c) $\sqrt{3\sqrt[4]{5} + 6\sqrt[7]{8}}$ je celistvý prvek nad $\mathbb{Z}$.

O úlohách se můžete bavit se spolužáky (a s vyučujícími), ale svá řešení sepisujte sami, bez cizí pomoci.
Odevzdávejte papírově na začátku cvičení / přednášky, anebo elektronicky na adresu `matej@gimli.ms.mff.cuni.cz` v PDF.