Úvod do komutativní algebry: cvičení 6

web cvičení: `gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23`

21. prosince 2023

algebraické množiny, Hilbertova věta o nulách, radikály

Ukážeme si:

1. Rozhodni, které z následujících množin jsou algebraické:

a) $\{(t, t^2, t^3) \in K^3 \mid t \in K\}$,
b) $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
c) $\mathbb{Z}$ jako podmnožina $\mathbb{R}$,
d) * $\mathbb{Z}^2$ jako podmnožina $\mathbb{R}^2$,
e) * $\{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. (protipříklad Hilbertovy věty bez algebraické uzavřenosti) Najdi v $\mathbb{R}[x]$ maximální ideál, který neobsahuje žádný lineární polynom.

3. *Jacobsonův radikál* okruhu R definujeme jako $\mathcal{J}(R) := \bigcap_{M<R \text{ maximální}} M$. Nahlédni, že $a \in \mathcal{J}(R)$, právě když je $1 - ar$ jednotka pro každé $r \in R$.

4. Urči v oboru celých čísel $\mathbb{Z}(+, -, 0, \cdot, 1)$

a) $\sqrt{(0)}$, $\mathcal{J}(\mathbb{Z})$,
b) $\sqrt{(25)}$, $\sqrt{(125)}$, $\sqrt{(50)}$, $\sqrt{(100)}$, $\sqrt{(\prod_i p_i^{r_i})}$ pro po dvou různá prvočísla p_i.

Dále urči

c) $\mathcal{J}(\mathbb{Z}/(100))$,
d) * kdy je ${}^{(\mathbb{Z}/(n))}/_{\mathcal{J}(\mathbb{Z}/(n)}$ těleso.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku): Úlohy s * jsou těžší.

5. V oboru $\mathbb{C}[x]$ polynomů nad komplexními čísly

a) spočítej $\sqrt{(0)}$, $\mathcal{J}(\mathbb{C}[x])$, $\sqrt{(x-3)^5(x-1)^4(x^3+2)}$, $\sqrt{(x^6 - x^4 - x^2 + 1)}$,
b) dokaž, že $\sqrt{(p)} = (\frac{p}{\text{NSD}(p,p')})$, kde $p \in \mathbb{C}[x]$.

6. Pracujme nad $K = \mathbb{C}$:

a) Dokaž, že $I(V(x^2 - y)) = (x^2 - y)$ a že algebraická množina $V(x^2 - y) \subset \mathbb{C}^2$ je ireducibilní.
b) Urči množinu $V(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$ a rozlož ji na ireducibilní komponenty.
c) * Rozlož $V(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1) \subset \mathbb{C}^3$ na ireducibilní komponenty.

7. Je-li K konečné těleso, pak je každá podmnožina v K^n algebraická.

8. Nahlédni, že pro ideál $I < R$ je $\sqrt{I}$ roven $\pi^{-1}(\sqrt{0/I})$, kde $\pi : R \twoheadrightarrow R/I$ je přirozená projekce.

9. Buď K nekonečné těleso a $V = \{(t, t^2, t^3, \ldots, t^n) \mid t \in K\} \subset K^n$. Urči $I(V)$ (s důkazem!) a na základě úlohy z DÚ (V ireducibilní $\iff$ $I(V)$ prvoideál) vyvoď, že V je ireducibilní.

10. Rozmysli si následující charakterizace ideálů pomocí faktorokruhů: $I < R$ je

- maximální, právě když jsou všechny nenulové prvky R/I invertibilní,
- prvoideál, právě když je součin nenulových prvků v R/I vždy nenulový,
- radikálový, právě když je mocnina nenulového prvku v R/I vždy nenulová.

11. Dokaž, že $f(x, y) = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ je ireducibilní polynom, ale množina $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ je reducibilní.

Hinty:

7. Jednobodové množiny jsou vždy algebraické.

9. Převeď vše na jednu proměnnou.