Úvod do komutativní algebry: cvičení 5

web cvičení: `gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23`

7. prosince 2023

Počítání Galoisových grup, Galoisova korespondence

Na tomto cvičení pro nás *určit* Galoisovu grupu znamená najít nějakou „známou“ grupu, které je izomorfní, a rozmyslet si, jak jednotlivé automorfismy působí. Známe grupy jsou třeba $\mathbb{Z}_n$, D_{2n}, S_n nebo součiny známých grup.

Ukážeme si:

1. Urči, zda je Galoisovu grupu $T \supset \mathbb{Q}$ a všechna tělesa U, $T \supset U \supset \mathbb{Q}$, jestliže

a) $T = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$,
b) $T =$ rozkladové nadtěleso $x^3 - 2$ nad $\mathbb{Q}$.

Další příklady:
Řeš na přeskáčku – nestrav celé cvičení na jednom typu úlohy! Úlohy s * jsou těžší.

2. Pro rozšíření těles $U \supset T$ urči $[U : T]$ spolu s bází U jako vektorového prostoru nad T, rozhodni, zda jde o Galoisovo rozšíření, a pokud ano, urči také všechna tělesa V, $U \supset V \supset T$, jestliže

a) $U = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, e^{2\pi i/3})$, $T = \mathbb{Q}$,
b) $U = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, $T = \mathbb{Q}$,
c) $U = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, $T = \mathbb{Q}$,
d) $U = \mathbb{Q}\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)$, $T = \mathbb{Q}$.

3. Buď U rozkladové nadtěleso polynomu f nad tělesem T. Urči U, $[U : T]$, bázi U nad T a $\mathrm{Gal}(U/T)$ (můžeš se taky zamyslet nad tělesy V, $U \supset V \supset T$, ale mnohdy vypadají dost ošklivě), jestliže

a) $f = x^2 - 5$, $T = \mathbb{Q}$,
b) $f = x^3 - 2$, $T = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/3})$,
c) $f = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$, $T = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
*d) $f = (x^2 - 1)^2 - 2$, $T = \mathbb{Q}$.

4. Mějme tělesa $V \supset U \supset T$ taková, že jak $V \supset T$, tak $U \supset T$ jsou normální rozšíření. Pak $\mathrm{Gal}(V/U) \lhd \mathrm{Gal}(V/T)$ a $\mathrm{Gal}(V/T)/\mathrm{Gal}(V/U) \simeq \mathrm{Gal}(U/T)$.

5. Uvažujme cyklotomická tělesa.

a) Připomeň si, že $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})/\mathbb{Q}\right) \simeq \mathbb{Z}_n^\times$. Předpokládej, že už víš $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.
b) Buď U rozkladové nadtěleso $x^{20} - 1$ nad $\mathbb{Q}(i)$. Urči $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q}(i))$ a všechna mezitělesa V, $U \supset V \supset \mathbb{Q}(i)$.
c) * Buď U kořenové nadtěleso $x^3 + x^2 - 2x - 1$ nad $\mathbb{Q}$. Urči $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$.

6. Mějme rozšíření $U \supset \mathbb{Q}$ konečného stupně, které ale není normální. Zamysli se, jestli přesto nedovedeme *nějak* pomocí Galoisovy korespondence najít všechna tělesa V, $U \supset V \supset \mathbb{Q}$. Obecněji uvažuj totéž pro rozšíření $U \supset T$, jež je separabilní a konečného stupně, ale není normální.

7. * Buď U rozkladové nadtěleso polynomu f nad tělesem T. Urči U, $[U : T]$, bázi U nad T a $\mathrm{Gal}(U/T)$ a všechna tělesa V, $U \supset V \supset T$, jestliže

a) $f = x^3 - 5$, $T = \mathbb{Z}_7$,
b) $f = x^4 - 3$, $T = \mathbb{Z}_5$,
c) $f = x^{p^k} - x$, $T = \mathbb{Z}_p$.

8. ** Nahlédni, že pokud $\mathrm{Gal}(T/\mathbb{Q}) \simeq A_4$, pak neexistuje žádné těleso U, $T \supset U \supset \mathbb{Q}$ se stupněm $[U : \mathbb{Q}] = 2$. Pokud si věříš, zkus dokázat, že rozkladové nadtěleso $f = x^4 + 8x + 12$ nad $\mathbb{Q}$ je příkladem takového T. (Mně se to zatím nepovedlo dokázat, ale podle důvěryhodného zdroje by to měla být pravda.)

Hinty:

5. b) Dívej se na $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q}(i))$ uvnitř $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$, její strukturu znáš. c) Dívej se v sedmém cyklotomickém tělese.

6. Nestačí se na všechno podívat uvnitř většího rozšíření, které je Galoisovo?

7. a), b) Jaké má $\mathbb{Z}_7/\mathbb{Z}_5$ třetí/čtvrté odmocniny z jedničky? c) Trik: množina kořenů je uzavřená na sčítání i násobení.