Úvod do komutativní algebry: cvičení 4

web cvičení: `gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23`

23. listopadu 2023

Rozšíření separabilní, normální, jednoduchá a Galoisova

Ukážeme si:

1. Buď $U \supset T$ rozšíření konečného stupně. Dokaž, že je Galoisovo, právě když $[U : T] = \#\operatorname{Gal}(U/T)$.

2. (zachovávání a skládání význačných vlastností) Buďte $V \supset U \supset T$ rozšíření těles. Víš-li, že rozšíření $V \supset T$ má vlastnost X, rozhodni, zda nutně musí i $V \supset U$ či $U \supset T$ mít vlastnost X. Víš-li, že obě $V \supset U$, $U \supset T$ mají vlastnost X, rozhodni, zda ji nutně musí mít i $V \supset T$.

a) $X =$ konečného stupně,
b) $X =$ algebraické,
c) $X =$ separabilní,
d) $X =$ normální,
e) $X =$ Galoisovo.

3. Rozhodni o následujících rozšířeních, které z význačných vlastností z úlohy **2.** mají a které ne:

a) $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \supset \mathbb{Q}$, *c) $\mathbb{Z}_p(x) \supset \mathbb{Z}_p$, *d) $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}$.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku): Úlohy s * jsou těžší.

4. Buď $V \supset T$ Galoisovo rozšíření a $V \supset U \supset T$. Dokaž, že $[U : T] = \frac{\#\operatorname{Gal}(V/T)}{\#\operatorname{Gal}(V/U)}$.

5. Buď $f \in T[x]$ polynom s rozkladem na navzájem neasociované ireducibilní polynomy $f = f_1 \cdots f_k$. Uvažujme Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa f nad T jako grupu permutací na množině kořenů f. Nahlédni, že každá z těchto permutací musí mít alespoň k cyklů.

6. (opakování z přednášky) Buď U těleso, $G < \operatorname{Aut}(U)$ podgrupa a $T \subset U$ podtěleso. Potom platí $\operatorname{Gal}(U/\operatorname{Fix}(U, G)) \supset G$ a $\operatorname{Fix}(U, \operatorname{Gal}(U/T)) \supset T$.

7. Budiž $U \supset T$ separabilní rozšíření konečného stupně. Nahlédni, že existuje těleso V takové, že $U \subset V$, $[V : T] \leq ([U : T])!$ a rozšíření $V \supset T$ je Galoisovo.

8. Podle lemmatu 2.25, je-li $U \supset T$ algebraické rozšíření, pak už musí každý T-homomorfismus $\varphi : U \to U$ být dokonce T-automorfismus. Rozmysli si, že algebraičnost je nutná – pro $T = \mathbb{Z}_p$, $U = T(x)$ (těleso racionálních funkcí) najdi T-homomorfismus $\varphi : U \to U$, který není T-automorfismus.

9. Buď T těleso s $\operatorname{char} T \neq 2$ a $a, b \in T$ prvky s $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \notin T$. Pak $[T(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : T] = 4$.
* Můžeš zkusit dokázat $\operatorname{Gal}(T(\sqrt{a}, \sqrt{b})/T) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

10. Rozšíření $U \supset T$ je normální, právě když existuje množina $\mathcal{M} \subset T[x]$ taková, že U je rozkladové nadtěleso množiny $\mathcal{M}$ nad T.

11. * (existence separabilního uzávěru) Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Všechny prvky $\alpha \in U$, jež jsou separabilní nad T, tvoří podtěleso U.

12. * Buď p prvočíslo, $U = \mathbb{Z}_p(x, y)$, $T = \mathbb{Z}_p(x^p, y^p)$. Dokaž, že rozšíření $U \supset T$ není jednoduché.

Hinty:

4. Stačí zkombinovat **2.**d) a **1.**.

7. Máš jednoduché rozšíření, rozlož minimální polynom.

11. Uvědom si, že libovolné dva separabilní prvky nagenerují separabilní rozšíření.

12. Pokud $U = T(r)$, nahlédni $r^p \in T$ a vyvoď spor pomocí stupňů.