Úvod do komutativní algebry: cvičení 3

web cvičení: `gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23`

16. listopadu 2023

Kořenová a rozkladová nadtělesa, algebraický uzávěr, Galoisova grupa, separabilita

Ukážeme si:

1. Buď α algebraický prvek nad tělesem T. Pak $[T(\alpha) : T] = \deg m_{\alpha,T}$.

2. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a také jejich Galoisovy grupy nad T:

a) $f(x) = x^2 + 3$, $T = \mathbb{R}$, b) $f(x) = x^2 - 1$, $T = \mathbb{Q}$, *c) $f(x) = x^3 - 2$, $T = \mathbb{Q}$.

3. Mějme tělesa $T \subset U \subset V$. Je-li V algebraické nad U a U algebraické nad T, pak je také V algebraické nad T.

4. Buď $U \supset T$ rozšíření těles a $\alpha \in U$ kořen *nějakého* separabilního $f \in T[x]$. Potom už je α separabilní nad T.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku): Úlohy s * jsou těžší.

5. Rozšíření těles konečného stupně je nutně algebraické.

6. Mějme rozšíření těles $V \supset U \supset T$. Pak $[V : T] = [V : U] \cdot [U : T]$.

7. Buď $T \subset U$ algebraické rozšíření těles a $U \subset K$ (ne nutně algebraické). Pak K je algebraický uzávěr U, právě když K je algebraický uzávěr T.

8. Buď $\varphi : K \to R$ homomorfismus okruhů. Připomeň si, že když K je těleso, musí φ být prosté.

9. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a (případně) také jejich Galoisovy grupy nad T:

a) $f(x) = x^2 + 1,\ T = \mathbb{Q}$, *c) $f(x) = x^2 + 1,\ T = \mathbb{Z}_7$,
b) $f(x) = x^4 - 1,\ T = \mathbb{Q}$, **d) $f(x) = x^n - 1,\ T = \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}$.

10. Buďte $S \supset T$ tělesa, S algebraicky uzavřené a $U = \{\alpha \in S \mid \alpha \text{ algebraické nad } T\}$. Pak je U algebraický uzávěr T. (tvrzení 2.7 ze skript)

11. Buďte T, U tělesa charakteristiky 0. Pak $\mathbb{Q} \subset T, U$ a každý homomorfismus $\varphi : T \to U$ je $\mathbb{Q}$-homomorfismem. (V charakteristice p má stejnou vlastnost těleso $\mathbb{Z}_p$.)

12. Prvek α je algebraický nad tělesem T, právě když $T(\alpha) = T[\alpha]$.

13. * Žádné konečné těleso není algebraicky uzavřené.

14. * Buď p prvočíslo, $T = \mathbb{Z}_p(y)$ a $U = T(\sqrt[p]{y})$. Urči $[U : T]$, $[U : T]_s$ a $\mathrm{Gal}(U/T)$.

15. * Algebraický uzávěr nekonečného tělesa T má stejnou mohutnost jako T.

Hinty:

4. $m_{\alpha,T} \mid f$.

11. Homomorfismus musí nechávat na místě celé podtěleso generované jedničkou (tzv. *prvotěleso*).

12. Z minimálního polynomu vyrobíš inverz (a naopak).

13. Začni s polynomem, jehož kořeny jsou všechny prvky.

14. $x^p - y \in \mathbb{Z}_p[y][x]$ je ireducibilní z Eisensteina, ale má jen jeden p-násobný kořen.

15. Rozmysli si, že $\#T[x] = \#T$, takže když (v jednom kroku) přidáme kořeny všech polynomů, mohutnost se zachová.