

Úvod do komutativní algebry: cvičení 1

web cvičení: gimli.ms.mff.cuni.cz/~matej/komalg23

12. října 2023

ideály, ideálové operace, prvoideály, maximální ideály

Ukážeme si:

1. Dokaž, že sjednocení řetězce (libovolně mnoha) ideálů $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ je ideál.
2. Pro ideály I, J definujme $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Dokaž, že $I + J$ je nejmenší ideál v R , který obsahuje I a J .
3. Buď R okruh a M ideál v R . Dokaž:
 - a) M je maximální, právě když pro všechna $a \in R \setminus M$ platí $R = M + aR$.
 - b) Pokud M je maximální a $a \in R \setminus M$, pak existují $m \in M$ a $r \in R$ taková, že $1 = m + ar$.
4. Mějme ideály I, J, K okruhu R . Dokaž, že $IJ \subset I \cap J$ a $I(J + K) = IJ + IK$. Najdi příklad, kdy $IJ \neq I \cap J$.
5. Urči: $\mathbb{Q}[x]/(x+2)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$, $\mathbb{R}[x]/(x^2-2)$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2-2)$.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku):

6. Dokaž, že operace na faktorokruhu jsou definované korektně a že jde o okruh (a dokaž ostatní věci z přednášky, které jsme nechali jako cvičení).
7. Dokaž 3. větu o izomorfismu: Je-li R okruh, $I < R$ ideál a $S \subset R$ podokruh, pak je $S + I$ podokruh v R a platí $(S + I)/I \simeq S/(S \cap I)$.
8. Uvažujme okruh $\mathbb{Z}$ a uvažujme v něm ideály $I = (168)$ a $J = (288)$.
 - a) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v $\mathbb{Z}$?
 - b) Urči $I + J$, IJ , $I \cap J$, $I^2 + J$.
 - c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I , J , IJ , $I \cap J$, resp. J^2 .
9. Buď R obor hlavních ideálů a $a, b \in R$.
 - a) Urči $(a)(b)$, $(a) + (b)$, $(a) \cap (b)$.
 - b) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v R ?
 - c) Dokaž, že faktor R podle nenulového prvoideálu je těleso.
10. Pro podmnožiny A, B okruhu R definujme $A \odot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ (pozor, toto neodpovídá násobení ideálů). Buď I ideál v R . Dokaž, že $(a + I) \odot (b + I) \subset ab + I$. Platí opačná inkluze?
11. Uvažujme obor hlavních ideálů $\mathbb{Q}[x]$ a ideály $I = (x^3 + x^2 + 2x + 2)$ a $J = (x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$.
 - a) Urči $I + J$, IJ , $I \cap J$, $I^2 + J^3$.
 - b) Které faktory modulo hlavní ideál z bodu a) jsou obory?
 - c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I , J , IJ , $I \cap J$, resp. J^2 .
12. Buď R noetherovský okruh a $I < R$ ideál. Dokaž, že R/I je také noetherovský.
13. Je dán okruh R , v němž pro každé $x \in R$ existuje celé číslo $n \geq 2$ tak, že $x^n = x$. Dokaž, že každý prvoideál v R je maximální.

Hinty:

5. 1. věta o izomorfismu + někdy Čínská zbytková.
7. Projekce $\pi: R \twoheadrightarrow R/I$ a její zúžení na $\varphi: S \rightarrow R/I$. 1. věta o izomorfismu pro φ .
10. Neplatí. Zvol $R = \mathbb{Z}$ a prvočíslo v $ab + I$.
12. Ideály v R/I jsou přesně tvaru J/I pro $J < R$.
13. Najdi inverz ve faktorokruhu.