Úvod do komutativní algebry: domácí úkol 3

Termín odevzdání: 19. prosince 10:40

1. (6 bodů) Buď $U = \mathbb{Q}(i, \sqrt{7})$. Rozhodněte, zda je rozšíření $U \supset \mathbb{Q}$ Galoisovo, a popište $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$ a všechna tělesa $U \supset T \supset \mathbb{Q}$. (Bez použití věty 2.29, kterou jsme na přednášce nedokázali zcela.)

2. (8 bodů) Buď V rozkladové nadtěleso polynomu $f(x) = x^4 - 2$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda je $V \supset \mathbb{Q}$ Galoisovo rozšíření, a určete $\mathrm{Gal}(V/\mathbb{Q})$. Nalezněte všechna tělesa T taková, že $V \supset T \supset \mathbb{Q}$, $[V : T] = 2$ a zároveň je $T \supset \mathbb{Q}$ normální rozšíření.

3. (5 bodů) Buď P prvoideál v okruhu R a I, J vlastní ideály v R. Dokažte:

a) $\sqrt{I} \subset P$, právě když $I \subset P$.

b) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

4. (6 bodů) Buď K těleso a $V \subset K^n$ neprázdná algebraická množina. Dokažte, že V je ireducibilní, právě když je $I(V)$ prvoideál.

O úlohách se můžete bavit se spolužáky (a s vyučujícími), ale svá řešení sepisujte sami, bez cizí pomoci.

Odevzdávejte papírově na začátku cvičení / přednášky, anebo elektronicky na adresu `matej@gimli.ms.mff.cuni.cz` v PDF.