Úvod do komutativní algebry: domácí úkol 2

Termín odevzdání: 28. listopadu 10:40

1. (7 bodů) Buďte $R \subset S \subset T$ obory. Dokažte:

a) Je-li T konečně generovaný S-modul a S konečně generovaný R-modul, pak je také T konečně generovaný R-modul.

b) Nechť $\alpha, \beta \in S$. Je-li α celistvý prvek nad R a β celistvý prvek nad $R[\alpha]$, pak je také β celistvý prvek nad R.

c) $\sqrt{3\sqrt[4]{5} + 6\sqrt[7]{8}}$ je celistvý prvek nad $\mathbb{Z}$.

2. (6 bodů) Najděte $\alpha \in \mathbb{C}$ takové, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\alpha)$. (Dokazujte pečlivě; nesnažte se prohlašovat za zřejmá tvrzení typu „součet dvou různých odmocnin musí být iracionální“.)

3. (6 bodů) Buď U těleso a $G < \mathrm{Aut}(U)$. Dokažte, že potom pro všechna $\varphi \in \mathrm{Aut}(U)$ platí $\mathrm{Fix}(U, \varphi G \varphi^{-1}) = \varphi\left(\mathrm{Fix}(U, G)\right)$.

4. (6 bodů) Buď T rozkladové nadtěleso polynomu $x^4 - 5$ nad $\mathbb{Q}$. Určete stupeň rozšíření $[T : \mathbb{Q}]$.

O úlohách se můžete bavit se spolužáky (a s vyučujícími), ale svá řešení sepisujte sami, bez cizí pomoci.
Odevzdávejte papírově na začátku cvičení / přednášky, anebo elektronicky na adresu `matej@gimli.ms.mff.cuni.cz` v PDF.