

# Úvod do komutativní algebry: domácí úkol 1

Termín odevzdání: 7. listopadu 10:40

1. Uvažujme okruh  $R$ . Dokažte, že  $R$  je obor integrity, právě když  $R[x]$  je obor integrity.
2. Bud'  $R$  okruh. Dokažte, že je-li  $R[x]$  noetherovský, pak je i  $R$  noetherovský.
3. Bud'  $R$  gaussovský obor a  $T$  jeho podílové těleso. Dokažte, že má-li monický polynom  $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in R[x]$  kořen  $t \in T$ , pak dokonce  $t \in R$ .
4. Bud'  $R$  okruh a  $I, J < R$  komaximální ideály. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla  $m, n$  jsou ideály  $I^m, J^n$  komaximální.
5. *Multiplikativní množinou* v okruhu  $R$  myslíme takovou  $S \subset R$ , která je neprázdná, neobsahuje 0 a je uzavřená na násobení. Pomocí Zornova lemmatu (bez použití lemmatu 1.24 ve skriptech) dokažte: je-li  $S \subset R$  multiplikativní množina a ideál  $I < R$  splňuje  $I \cap S = \emptyset$ , pak existuje prvoideál  $P \supset I$  splňující  $P \cap S = \emptyset$ .

Každá z úloh je za 5 bodů. Můžete se o nich bavit se spolužáky (a s vyučujícími), ale svá řešení sepisujte sami, bez cizí pomoci.

Odevzdávejte papírově na začátku cvičení / přednášky, anebo elektronicky na adresu `matej@gimli.ms.mff.cuni.cz` v PDF.