Úvod do komutativní algebry: cvičení 4

14. listopadu 2022

Rozšíření separabilní, normální, jednoduchá a Galoisova

Ukážeme si:

1. (zachovávání a skládání význačných vlastností) Buďte $V \supset U \supset T$ rozšíření těles. Víš-li, že rozšíření $V \supset T$ má vlastnost X, rozhodni, zda nutně musí i $V \supset U$ či $U \supset T$ mít vlastnost X. Víš-li, že obě $V \supset U$, $U \supset T$ mají vlastnost X, rozhodni, zda ji nutně musí mít i $V \supset T$.

a) $X =$ konečného stupně,
b) $X =$ normální,
c) $X =$ separabilní (může se hodit úloha **4.**),
d) $X =$ Galoisovo,
e) $X =$ algebraické.

2. Urči $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]_s$ a $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Rozhodni, které význačné vlastnosti z úlohy **1.** rozšíření $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ má a které nikoliv.

3. Buď $U \supset T$ rozšíření konečného stupně. Dokaž, že je Galoisovo, právě když $[U : T] = \#\,\mathrm{Gal}(U/T)$.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku): Úlohy s * jsou těžší.

4. Buď $U \supset T$ rozšíření těles a $\alpha \in U$ kořen *nějakého* separabilního $f \in T[x]$. Potom už je α separabilní nad T.

5. (opakování z přednášky) Buď U těleso, $G < \mathrm{Aut}(U)$ podgrupa a $T \subset U$ podtěleso. Potom platí $\mathrm{Gal}(U/\,\mathrm{Fix}(U,G)) \supset G$ a $\mathrm{Fix}(U, \mathrm{Gal}(U/T)) \supset T$.

6. Buď $V \supset T$ Galoisovo rozšíření a $V \supset U \supset T$. Dokaž, že $[U : T] = \frac{\#\,\mathrm{Gal}(V/T)}{\#\,\mathrm{Gal}(V/U)}$.

7. Buď $f \in T[x]$ polynom s rozkladem na navzájem neasociované ireducibilní polynomy $f = f_1 \cdots f_k$. Uvažujme Galoisovu grupu rozkladového nadtělesa f nad T jako grupu permutací na množině kořenů f. Nahlédni, že každá z těchto permutací musí mít alespoň k cyklů.

8. Buď p prvočíslo, $T = \mathbb{Z}_p(y)$ a $U = T(\sqrt[p]{y})$. Urči $[U : T]$, $[U : T]_s$ a $\mathrm{Gal}(U/T)$.

9. V přednášce padlo, že je-li $U \supset T$ algebraické rozšíření, pak už musí každý T-homomorfismus $\varphi : U \to U$ být dokonce T-automorfismus. Rozmysli si, že algebraičnost je nutná – pro $T = \mathbb{Z}_p$, $U = T(y)$ najdi T-homomorfismus $\varphi : U \to U$, který není T-automorfismus.

10. Buď T těleso s $\mathrm{char}\, T \neq 2$ a $a, b \in T$ prvky s $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \notin T$. Pak $[T(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : T] = 4$.
* Můžeš zkusit dokázat $\mathrm{Gal}(T(\sqrt{a}, \sqrt{b})/T) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

11. Rozšíření $U \supset T$ je normální, právě když existuje množina $\mathcal{M} \subset T[x]$ taková, že U je rozkladové nadtěleso množiny $\mathcal{M}$ nad T.

12. (existence separabilního uzávěru) Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Všechny prvky $\alpha \in U$, jež jsou separabilní nad T, tvoří podtěleso U.

13. * (existence normálního uzávěru) Buď $U \supset T$ rozšíření těles. Dokaž, že následující V je těleso: $V := \{\alpha \in U \mid \alpha \text{ algebraické a jeho minimální polynom nad } T \text{ má všechny kořeny v } U\}$.

14. * Buď p prvočíslo, $U = \mathbb{Z}_p(x, y)$, $T = \mathbb{Z}_p(x^p, y^p)$. Dokaž, že rozšíření $U \supset T$ není jednoduché.

Hinty:

4. $m_{\alpha,T} \mid f$.

6. Stačí zkombinovat 1d) a 3.

8. $x^p - y \in \mathbb{Z}_p[y][x]$ je ireducibilní z Eisensteina, ale má jen jeden p-násobný kořen.

13. Vezmi $\tilde{V} := T(V)$ a z jeho normality ukaž, že každé $\beta \in \tilde{V}$ už muselo ležet ve V.

14. Pokud $U = T(f)$, nahlédni $f^p \in T$ a vyvoď spor pomocí stupňů.