Úvod do komutativní algebry: cvičení 3

3. listopadu 2022

Kořenová a rozkladová nadtělesa, celistvé prvky, algebraický uzávěr, Galoisova grupa

Ukážeme si:

1. Buď α algebraický prvek nad tělesem T. Pak $[T(\alpha) : T] = \deg m_{\alpha,T}$.

2. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a také jejich Galoisovy grupy nad T:

a) $f(x) = x^2 + 3$, $T = \mathbb{R}$, b) $f(x) = x^2 - 1$, $T = \mathbb{Q}$, *c) $f(x) = x^3 - 2$, $T = \mathbb{Q}$.

3. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Je-li $u \in T$ celistvé nad R, pak $u \in R$.

4. Urči okruh celistvých prvků v tělese a) $\mathbb{Q}(i)$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *c) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. (Předpokládej, že už víš **13.**)

5. Mějme tělesa $T \subset U \subset V$. Je-li V algebraické nad U a U algebraické nad T, pak je také V algebraické nad T.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku): Úlohy s * jsou těžší.

6. Mějme rozšíření těles $V \supset U \supset T$. Pak $[V : T] = [V : U] \cdot [U : T]$.

7. Buď $T \subset U$ algebraické rozšíření těles a $U \subset K$ (ne nutně algebraické). Pak K je algebraický uzávěr U, právě když K je algebraický uzávěr T.

8. Buďte $S \supset T$ tělesa, S algebraicky uzavřené a $U = \{\alpha \in S \mid \alpha \text{ algebraické nad } T\}$. Pak je U algebraický uzávěr T. (tvrzení 2.7 ze skript)

9. Pro těleso T a polynom $f(x)$ urči všechna možná kořenová nadtělesa pro f nad T, rozkladové nadtěleso pro f nad T, stupně rozšíření všech těchto těles a (případně) také jejich Galoisovy grupy nad T:

a) $f(x) = x^2 + 1,\ T = \mathbb{Q}$, b) $f(x) = x^4 - 1,\ T = \mathbb{Q}$,

c) $f(x) = x^2 + 1,\ T = \mathbb{Z}_7$, *d) $f(x) = x^n - 1,\ T = \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}$.

10. Buďte T, U tělesa charakteristiky 0. Pak $\mathbb{Q} \subset T, U$ a každý homomorfismus $\varphi : T \to U$ je $\mathbb{Q}$-homomorfismem. (V charakteristice p má stejnou vlastnost těleso $\mathbb{Z}_p$.)

11. Prvek α je algebraický nad tělesem T, právě když $T(\alpha) = T[\alpha]$.

12. Rozšíření těles konečného stupně je nutně algebraické.

13. Buď T podílové těleso gaussovského oboru R a dále buď $S \supset T$ nadtěleso. Dokaž, že je-li $\alpha \in S$ celistvý prvek nad R, pak má *monický* minimální polynom α nad T koeficienty z R.

14. * Žádné konečné těleso není algebraicky uzavřené.

15. * Algebraický uzávěr nekonečného tělesa T má stejnou mohutnost jako T.

16. Ať je obor S konečně generovaný okruh nad R. Pak S je konečně generovaný R-modul, právě když S je celistvý nad R (neboli každý prvek $s \in S$ je celistvý nad R).

17. Pro která $m, n \in \mathbb{Z}$ jsou tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ $\mathbb{Q}$-izomorfní?

Hinty:

10. Homomorfismus musí nechávat na místě celé podtěleso generované jedničkou (tzv. *prvotěleso*).

11. Z minimálního polynomu vyrobíš inverz (a naopak).

13. Gaussovo lemma.

14. Začni s polynomem, jehož kořeny jsou všechny prvky.

15. Rozmysli si, že $\#T[x] = \#T$, takže když (v jednom kroku) přidáme kořeny všech polynomů, mohutnost se zachová.