Úvod do komutativní algebry: cvičení 1

10. října 2022

Ukážeme si:

1. Dokaž, že sjednocení řetězce (libovolně mnoha) ideálů $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ je ideál.

2. Pro ideály I, J definujme $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Dokaž, že $I + J$ je nejmenší ideál v R, který obsahuje I a J.

3. Buď R okruh a M ideál v R. Dokaž:

a) M je maximální, právě když pro všechna $a \in R \setminus M$ platí $R = M + aR$.
b) Pokud M je maximální a $a \in R \setminus M$, pak existují $m \in M$ a $r \in R$ taková, že $1 = m + ar$.

4. Urči: $\mathbb{Q}[x]/(x + 2)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1)$, $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 2)$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2)$.

5. Mějme ideály I, J, K okruhu R. Dokaž, že $IJ \subset I \cap J$ a $I(J + K) = IJ + IK$. Najdi příklad, kdy $IJ \neq I \cap J$.

Další příklady (řeš klidně na přeskáčku):

6. Dokaž, že operace na faktorokruhu jsou definované korektně a že jde o okruh (a dokaž ostatní věci z přednášky, které jsme nechali jako cvičení).

7. Dokaž 3. větu o izomorfismu: Je-li R okruh, $I < R$ ideál a $S \subset R$ podokruh, pak je $S+I$ podokruh v R a platí ${}^{(S + I)}/_{I} \simeq {}^{S}/_{(S \cap I)}$.

8. Uvažujme okruh $\mathbb{Z}$ a uvažujme v něm ideály $I = (168)$ a $J = (288)$.

a) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v $\mathbb{Z}$?
b) Urči $I + J$, IJ, $I \cap J$, $I^2 + J$.
c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I, J, IJ, $I \cap J$, resp. J^2.

9. Buď R obor hlavních ideálů a $a, b \in R$.

a) Urči $(a)(b)$, $(a) + (b)$, $(a) \cap (b)$.
b) Jak vypadají všechny maximální ideály a prvoideály v R?
c) Dokaž, že faktor R podle nenulového prvoideálu je těleso.

10. Pro podmnožiny A, B okruhu R definujme $A \odot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ (pozor, toto neodpovídá násobení ideálů). Buď I ideál v R. Dokaž, že $(a + I) \odot (b + I) \subset ab + I$. Platí opačná inkluze?

11. Uvažujme obor hlavních ideálů $\mathbb{Q}[x]$ a ideály $I = (x^3 + x^2 + 2x + 2)$ a $J = (x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$.

a) Urči $I + J$, IJ, $I \cap J$, $I^2 + J^3$.
b) Které faktory modulo hlavní ideál z bodu a) jsou obory?
c) Najdi všechny prvoideály, které obsahují ideál I, J, IJ, $I \cap J$, resp. J^2.

12. Buď R noetherovský okruh a $I < R$ ideál. Dokaž, že R/I je také noetherovský.

13. Mějme v okruhu R prvek e splňující $e^2 = e$. Dokaž, že $R \simeq (e) \times (1 - e)$, když ideály vpravo uvažujeme jako podokruhy – co jsou v nich „jedničky“?

Hinty:

Obecně: když nevíš, zkus to sporem!

4. 1. věta o izomorfismu + někdy Čínská zbytková.

7. Projekce $\pi\colon R \twoheadrightarrow R/I$ a její zúžení na $\varphi\colon S \to R/I$. 1. věta o izomorfismu pro φ.

10. Neplatí. Zvol $R = \mathbb{Z}$ a prvočíslo v $ab + I$.

12. Ideály v R/I jsou přesně tvaru J/I pro $J < R$.

13. $(ea, (1 - e)b) \mapsto ea + (1 - e)b$.